Fonctions trigonométriques
Problème de recherche : la grande roue

Une grande roue de fête foraine a un rayon de 30 m ; son centre est situé à 32 m du sol. Elle tourne à vitesse constante et fait un tour complet en 12 minutes. On monte dans une nacelle au point le plus bas, à l'instant $t = 0$.

La mission

1. Exprimer la hauteur $h(t)$ de la nacelle (en mètres) en fonction du temps t (en minutes).
2. Au-dessus de 47 m, on aperçoit la mer. Pendant combien de temps, sur un tour, profite-t-on de cette vue ?

Pour aller plus loin

Le forain veut que la vue sur la mer dure 5 minutes par tour. Il peut modifier la vitesse de rotation ; il ne peut pas modifier la roue. Est-ce possible ? Que faudrait-il changer ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Modéliser

La roue tourne de 2π radians en 12 minutes, donc de $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ radian par minute.
Après t minutes, l'angle parcouru depuis le point le plus bas est $\theta = \frac{\pi t}{6}$.
Avec le centre de la roue comme origine, la nacelle partie du point le plus bas est à l'ordonnée $-30\cos\theta$ (pour $\theta = 0$: -30 ; pour $\theta = \pi$: $+30$). Donc

$$h(t) = 32 - 30\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right).$$

Vérification : $h(0) = 2$ m (point bas), $h(6) = 62$ m (point haut), $h(12) = 2$ m.

2. Au-dessus de 47 m

$h(t) > 47 \iff -30\cos\theta > 15 \iff \cos\theta < -\frac{1}{2}$.
Sur le cercle trigonométrique, pour $\theta \in [0\,;2\pi]$: $\cos\theta < -\frac{1}{2} \iff \frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{4\pi}{3}$.
Avec $\theta = \frac{\pi t}{6}$: $\frac{2\pi}{3} < \frac{\pi t}{6} < \frac{4\pi}{3} \iff 4 < t < 8$.
On voit la mer entre la 4e et la 8e minute, soit 4 minutes par tour (un tiers du tour).

Pour aller plus loin

La vue dure toujours un tiers du tour, quelle que soit la vitesse : il faut un tour de 15 minutes pour avoir 5 minutes de vue. C'est possible en ralentissant la roue. (Changer la fraction du tour nécessiterait de modifier la roue ou la hauteur de la vue.)

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Cercle trigonométrique, radian ; cosinus d'un angle.
- Résoudre une inéquation du type $\cos x < a$ sur un intervalle.