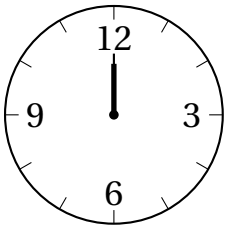
Fonctions trigonométriques
Problème de recherche : les aiguilles de l'horloge

Une horloge à aiguilles affiche midi : la petite aiguille (heures) et la grande aiguille (minutes) sont superposées, toutes deux sur le 12.



La mission

1. À quelle heure précise (à la seconde près) les aiguilles sont-elles de nouveau superposées pour la première fois après midi ?
2. Combien de fois les aiguilles sont-elles superposées en 24 heures, de minuit à minuit (minuit de départ compris, minuit d'arrivée non compris) ?
3. Combien de fois forment-elles un angle droit pendant ces 24 heures ?

Pour aller plus loin

Combien de fois par jour les aiguilles sont-elles exactement opposées (alignées de part et d'autre du centre) ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

Mise en équation

On mesure les angles en radians, dans le sens des aiguilles d'une montre, à partir du 12, et le temps t en heures depuis midi. La grande aiguille fait un tour (2π) par heure : elle a tourné de $2\pi t$. La petite fait un tour en 12 h : elle a tourné de $\frac{2\pi}{12}t = \frac{\pi}{6}t$. L'écart entre les deux angles parcourus est

$$2\pi t - \frac{\pi}{6}t = \frac{11\pi}{6}t.$$

1. La première superposition

Les aiguilles sont superposées quand cet écart est un multiple de 2π (les angles repèrent alors le même point du cercle trigonométrique) : $\frac{11\pi}{6}t = 2k\pi$, soit $t = \frac{12k}{11}$ avec k entier. La première fois après midi correspond à $k = 1$: $t = \frac{12}{11}$ h $= 1$ h $+\frac{60}{11}$ min, avec $\frac{60}{11} \approx 5{,}4545$ min ≈ 5 min 27 s. C'est vers **13 h 05 min 27 s**.

2. En 24 heures

On cherche les entiers $k \geqslant 0$ tels que $\frac{12k}{11} < 24$, soit $k < 22$: $k = 0, 1, \ldots, 21$. Les aiguilles sont superposées **22 fois** par jour (et non 24 : entre 11 h et 13 h, il n'y a qu'une superposition, à midi).

3. Les angles droits

Angle droit : l'écart vaut $\frac{\pi}{2}$ plus un multiple de π. $\frac{11\pi}{6}t = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff t = \frac{3+6k}{11}$. On veut $0 \leqslant \frac{3+6k}{11} < 24$, soit $0 \leqslant k \leqslant 43$: **44 fois** par jour.

Pour aller plus loin

Opposées : $\frac{11\pi}{6}t = \pi + 2k\pi \iff t = \frac{6+12k}{11}$, et $\frac{6+12k}{11} < 24 \iff k \leqslant 21$: **22 fois** par jour (par exemple à 6 h 00 précises).

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Mesure d'un angle en radians ; repérage sur le cercle trigonométrique.
- Angles associés au même point du cercle (à $2k\pi$ près).