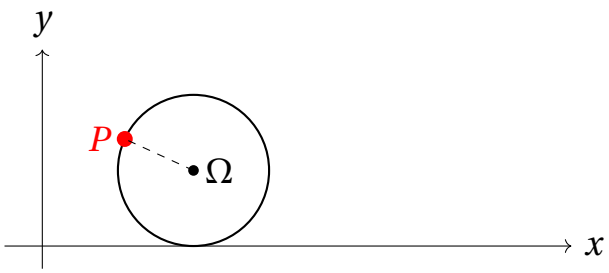
Fonctions trigonométriques
Problème de recherche : le caillou dans le pneu

Une roue de vélo de rayon 1 (l'unité vaut environ 35 cm) roule sans glisser sur une route horizontale. Un caillou est coincé dans le pneu ; au départ, il touche le sol. On admet que, lorsque la roue a tourné d'un angle t (en radians), le caillou se trouve au point

$$P(t)\left(t-\sin t\,;\ 1-\cos t\right)$$

et le centre de la roue au point $\Omega(t)\,(t\,;1)$.



La mission

1. Avec GeoGebra, tracer la trajectoire du caillou pour t entre 0 et 4π. Décrire la courbe obtenue.
2. Pour quelles valeurs de t le caillou touche-t-il le sol? Pour lesquelles est-il au plus haut? Quelle distance la roue parcourt-elle entre deux contacts du caillou avec le sol?
3. Pendant quelle fraction d'un tour de roue le caillou est-il à une hauteur supérieure à 1,5?
4. Pendant ce temps, comparer la distance horizontale parcourue par le caillou à celle parcourue par le centre de la roue.

Coups de pouce

Bloqué? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché!

Éléments de correction

1. La trajectoire

Le caillou décrit une suite d'arches identiques, posées sur l'axe des abscisses et de hauteur 2 : c'est une **cycloïde**. Aux points de contact, la courbe forme une pointe : le caillou arrive au sol à la verticale.

2. Contacts et sommets

Hauteur nulle : $1-\cos t = 0 \iff \cos t = 1 \iff t = 2k\pi$ (k entier). Hauteur maximale 2 : $\cos t = -1 \iff t = \pi + 2k\pi$. Entre deux contacts ($t = 0$ et $t = 2\pi$), le centre passe de l'abscisse 0 à l'abscisse 2π : la roue avance de $2\pi \approx 6{,}28$ unités, soit le périmètre de la roue (environ 2,2 m).

3. En hauteur

Sur $[0;2\pi]$: $1-\cos t > 1{,}5 \iff \cos t < -\frac{1}{2}$. Sur le cercle trigonométrique, $\cos t = -\frac{1}{2}$ pour $t = \frac{2\pi}{3}$ et $t = \frac{4\pi}{3}$, et $\cos t < -\frac{1}{2}$ entre ces deux valeurs. Le caillou est au-dessus de 1,5 pour $t \in \left]\frac{2\pi}{3}\,;\frac{4\pi}{3}\right[$, intervalle de longueur $\frac{2\pi}{3}$, soit **un tiers du tour**.

4. Les distances

Le centre avance de $\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}09$. Le caillou passe de l'abscisse $\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ à l'abscisse $\frac{4\pi}{3} - \sin\frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$: il avance de

$$\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 3{,}83.$$

Pendant ce tiers de tour, le caillou avance environ **1,8 fois plus** que le vélo : en haut de la roue, il va plus vite que le vélo ; près du sol, il est presque immobile.

Enrichissement historique : la cycloïde a passionné les mathématiciens du XVIIe siècle ; Blaise Pascal, qui l'appelait « la roulette », a même lancé en 1658 un concours sur ses propriétés.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Valeurs remarquables du cosinus et du sinus ; cercle trigonométrique.
- Résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques simples sur un tour.