Variables aléatoires
Problème de recherche : le coffre à butin

Dans un jeu vidéo, un joueur peut ouvrir un coffre à butin contre 40 gemmes (la monnaie du jeu). Un coffre contient un seul objet :

— un objet légendaire, revendable 950 gemmes, avec une probabilité c ;
— un objet rare, revendable 100 gemmes, avec une probabilité b ;
— sinon, un objet commun, qui ne se revend pas (0 gemme).

Pour respecter une charte d'équité, le studio s'impose deux règles :

— en moyenne, un coffre doit permettre de récupérer 30 gemmes en revendant son contenu ;
— un objet rare doit être au moins 4 fois plus probable qu'un objet légendaire.

La mission

1. Quelle est la plus grande probabilité possible d'obtenir un objet légendaire ?
2. Le service marketing hésite entre deux réglages extrêmes : le plus de légendaires possible, ou aucun légendaire. Comparer ces deux réglages du point de vue du joueur.

Pour aller plus loin

Combien de coffres un joueur doit-il ouvrir en moyenne pour obtenir un objet légendaire avec le premier réglage ? Combien de gemmes cela lui coûte-t-il en moyenne ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

Modéliser

Soit X la valeur de revente (en gemmes) du contenu d'un coffre. Loi de X :

x_i	0	100	950
$P(X = x_i)$	$1-b-c$	b	c

$E(X) = 100b + 950c$. Les règles s'écrivent : $100b + 950c = 30$ et $b \geqslant 4c$ (avec $b, c \geqslant 0$ et $b + c \leqslant 1$).

1. Maximum de c

Comme $b \geqslant 4c$: $30 = 100b + 950c \geqslant 400c + 950c = 1\,350c$, donc $c \leqslant \frac{30}{1\,350} = \frac{1}{45} \approx 0{,}022$.
Ce maximum est atteint pour $b = 4c = \frac{4}{45} \approx 0{,}089$.

La probabilité d'obtenir un légendaire est au plus $\frac{1}{45} \approx 2{,}2$ %.

2. Comparer les deux réglages

Réglage 1 : $c = \frac{1}{45}$, $b = \frac{4}{45}$. Réglage 2 : $c = 0$, $b = 0{,}3$. Dans les deux cas $E(X) = 30$: le joueur perd en moyenne 10 gemmes par coffre.
$E(X^2) = 10\,000b + 902\,500c$, donc $V(X) = E(X^2) - 30^2$:

- réglage 1 : $V(X) \approx 888{,}9 + 20\,055{,}6 - 900 \approx 20\,044$, $\sigma(X) \approx 141{,}6$;
- réglage 2 : $V(X) = 3\,000 - 900 = 2\,100$, $\sigma(X) \approx 45{,}8$.

Même espérance, mais des écarts-types très différents. Le réglage 1 est plus risqué : le plus souvent on ne gagne rien (environ 89 % de coffres communs), parfois on gagne gros. Le réglage 2 est plus régulier (un coffre sur trois rapporte 100 gemmes). Le réglage 1 est plus « excitant »… et pousse davantage à rejouer.

Pour aller plus loin

En moyenne, il faut $\frac{1}{c} = 45$ coffres pour obtenir un légendaire, soit $45 \times 40 = 1\,800$ gemmes dépensées (pour un objet revendable 950 gemmes).

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Loi de probabilité d'une variable aléatoire ; espérance, variance, écart-type.
- Interpréter l'espérance et l'écart-type pour comparer deux situations.

Pour aller plus loin (enrichissement)

Le résultat « en moyenne $\frac{1}{c}$ essais » relève de la *loi géométrique*, étudiée en Terminale. Plusieurs pays encadrent les coffres à butin, jugés proches des jeux d'argent.