Variables aléatoires
Problème de recherche : le stand des deux dés

À la fête du village, un forain propose le jeu suivant : le joueur lance deux dés équilibrés à six faces et reçoit, en euros, le **produit** des deux nombres obtenus. Par exemple, avec 4 et 5, il reçoit 20 €.

La mission

1. Quel prix minimal le forain doit-il fixer pour la partie pour ne pas perdre d'argent en moyenne ?
2. Pour un jeu moins coûteux, le forain envisage de verser seulement **le plus grand** des deux nombres obtenus. Déterminer la loi de ce gain, puis son espérance.
3. Et s'il verse **le plus petit** des deux nombres ? (Chercher un moyen d'éviter un nouveau calcul complet.)

Pour aller plus loin

Avec deux dés à n faces numérotées de 1 à n, quelle est l'espérance du produit ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Le produit

Les 36 couples $(a;b)$ sont équiprobables et le gain est $X = ab$. La somme des 36 produits est

$$\sum_{a=1}^{6}\sum_{b=1}^{6} ab = \sum_{a=1}^{6} a\,(1+2+\cdots+6) = 21\times 21 = 441.$$

Donc $E(X) = \frac{441}{36} = \mathbf{12{,}25}$. En moyenne, le forain verse 12,25 € par partie : il doit faire payer **au moins 12,25 €** (par exemple 13 € pour gagner un peu).

2. Le plus grand des deux

Notons M le plus grand des deux nombres. $M \leqslant k$ signifie que les deux dés donnent au plus k : k^2 cases. Donc $M = k$ correspond à $k^2-(k-1)^2 = 2k-1$ cases :

k	1	2	3	4	5	6
$P(M=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

$E(M) = \frac{1+6+15+28+45+66}{36} = \frac{161}{36} \approx \mathbf{4{,}47\ €}$.

3. Le plus petit des deux

Notons m le plus petit. Pour chaque lancer, $m+M = a+b$ (la somme des deux dés). Par linéarité de l'espérance, $E(m)+E(M) = E(a+b) = 3{,}5+3{,}5 = 7$, donc

$$E(m) = 7 - \frac{161}{36} = \frac{91}{36} \approx \mathbf{2{,}53\ €}.$$

Pour aller plus loin

La somme des n^2 produits vaut $(1+2+\cdots+n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, donc $E(X) = \frac{1}{n^2}\times\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$: c'est le carré de l'espérance d'un seul dé.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
- Calculer une espérance ; linéarité de l'espérance.