Fonctions affines et suites arithmétiques
Problème de recherche : la pile de gobelets

Un gobelet en plastique mesure 12 cm de haut. Quand on l'emboîte dans un autre gobelet identique, il dépasse de 1,5 cm. On note h_n la hauteur (en cm) d'une pile de n gobelets emboîtés : $h_1 = 12$.

La mission

1. Calculer h_2, h_3 puis exprimer h_n en fonction de n.
2. On veut ranger une pile de gobelets sous une étagère située à 1 m du sol de l'armoire. Combien de gobelets peut-on empiler au maximum ?
3. Un autre modèle de gobelet mesure 10 cm de haut et dépasse de 2 cm quand on l'emboîte. Pour quel nombre de gobelets les deux piles ont-elles la même hauteur ? Laquelle est la plus haute au-delà ?

Pour aller plus loin

Pour un troisième modèle, une pile de 4 gobelets mesure 16,5 cm et une pile de 10 gobelets mesure 25,5 cm. Quelle est la hauteur d'un seul gobelet ? Combien de centimètres dépasse-t-il quand on l'emboîte ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Les premières hauteurs

$h_2 = 12 + 1{,}5 = 13{,}5$ cm ; $h_3 = 15$ cm. Chaque gobelet ajouté augmente la hauteur de 1,5 cm : (h_n) est une suite arithmétique de premier terme $h_1 = 12$ et de raison 1,5, donc

$$h_n = 12 + 1{,}5\,(n-1) = 10{,}5 + 1{,}5n.$$

2. Sous l'étagère

$10{,}5 + 1{,}5n \leqslant 100 \iff 1{,}5n \leqslant 89{,}5 \iff n \leqslant 59{,}67$. On peut empiler au maximum 59 gobelets ($h_{59} = 99$ cm ; $h_{60} = 100{,}5$ cm ne passe pas).

3. Deux modèles

Pour le second modèle : $g_n = 10 + 2(n-1) = 8 + 2n$.

$10{,}5 + 1{,}5n = 8 + 2n \iff 2{,}5 = 0{,}5n \iff n = 5$. Avec 5 gobelets, les deux piles mesurent 18 cm.

Au-delà, la pile du second modèle est la plus haute, car elle augmente de 2 cm par gobelet contre 1,5 cm.

Pour aller plus loin

On note a la hauteur d'un gobelet et r le dépassement : $u_n = a + r\,(n-1)$.

Entre 4 et 10 gobelets, on a ajouté 6 gobelets et la pile a grandi de $25{,}5 - 16{,}5 = 9$ cm : $r = \frac{9}{6} = 1{,}5$ cm.

Puis $u_4 = a + 3 \times 1{,}5 = 16{,}5$, donc $a = 12$ cm. C'est en fait le premier modèle !

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Suite arithmétique : premier terme, raison, terme général.
- Problème de seuil.
- Retrouver une suite arithmétique à partir de deux termes.