Suites géométriques et fonction exponentielle
Problème de recherche : la règle de 72

Les conseillers financiers utilisent une astuce de calcul mental, la *règle de 72* :

> « Un capital placé à t % par an (intérêts composés) double en environ $\dfrac{72}{t}$ années. »

Par exemple, à 6 % par an, un capital doublerait en environ $\frac{72}{6} = 12$ ans.

La mission

1. Tester la règle de 72 pour des taux de 1 % à 12 %. Est-elle fiable ?
2. Un influenceur promet un placement à 24 % par an. En combien de temps le capital doublerait-il ? La règle de 72 fonctionne-t-elle encore ?

Pour aller plus loin

La même règle s'applique aux prix : avec une inflation de 3 % par an, au bout de combien de temps les prix doublent-ils ? Avec une baisse de 3 % par an, au bout de combien de temps un prix est-il divisé par deux ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

Modéliser

Un capital C_0 placé à t % par an vaut $C_n = C_0 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$ après n années : c'est une suite géométrique. Il double quand $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n \geqslant 2$. Plus généralement, la fonction $x \mapsto \left(1 + \frac{t}{100}\right)^x$ permet de parler de durées non entières.

1. Tester la règle

Au tableur (ou à la calculatrice, en cherchant x tel que $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^x = 2$) :

Taux t	1 %	2 %	3 %	4 %	6 %	8 %	12 %
Durée exacte x	69,7	35,0	23,4	17,7	11,9	9,0	6,1
$\frac{72}{t}$	72	36	24	18	12	9	6

La règle est très fiable pour des taux usuels (erreur de moins d'un an entre 2 % et 12 %). Elle est un peu moins précise pour des taux très faibles.

2. Un taux de 24 %

$1{,}24^3 \approx 1{,}91$ et $1{,}24^4 \approx 2{,}36$: le capital double en un peu plus de 3 ans (durée exacte $\approx 3{,}22$ ans). La règle donne $\frac{72}{24} = 3$: l'approximation se dégrade pour les grands taux. Et un rendement de 24 % par an doit éveiller la méfiance : un rendement élevé s'accompagne toujours d'un risque élevé.

Pour aller plus loin

Inflation de 3 % : les prix doublent en environ 24 ans ($1{,}03^{24} \approx 2{,}03$). Baisse de 3 % : il faut $0{,}97^n \leqslant 0{,}5$, soit $n = 23$ ans ($0{,}97^{23} \approx 0{,}496$) ; la règle donne aussi une bonne estimation.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Suites géométriques ; taux d'évolution et coefficient multiplicateur.
- Fonctions exponentielles $x \mapsto a^x$; résolution approchée d'une équation (tableur, calculatrice).

Pour aller plus loin (enrichissement, hors programme)

La durée exacte vaut $\frac{\ln 2}{\ln(1+t/100)} \approx \frac{69{,}3}{t}$ pour les petits taux, avec le logarithme népérien. On utilise 72 car ce nombre a beaucoup de diviseurs (2, 3, 4, 6, 8, 9, 12) et compense l'erreur pour les taux usuels.