Probabilités conditionnelles
Problème de recherche : la guirlande qui ne s'allume pas

Une guirlande lumineuse comporte 50 ampoules montées **en série** : si une seule ampoule est grillée, aucune ne s'allume. Chaque ampoule fonctionne avec une probabilité de 0,98, indépendamment des autres.

La mission

1. Une mini-guirlande ne comporte que 2 ampoules. Construire un arbre pondéré et calculer la probabilité qu'elle s'allume.
2. Quelle est la probabilité que la guirlande de 50 ampoules s'allume ? Le résultat est-il surprenant ?
3. Le fabricant veut que 90 % de ses guirlandes de 50 ampoules s'allument. Quelle doit être, au minimum, la probabilité qu'une ampoule fonctionne ?

Pour aller plus loin

Pour limiter les pannes, on coupe la guirlande en deux moitiés de 25 ampoules, montées en parallèle : chaque moitié s'allume dès que ses 25 ampoules fonctionnent, indépendamment de l'autre moitié. Quelle est la probabilité qu'au moins une moitié s'allume ? que les deux s'allument ?

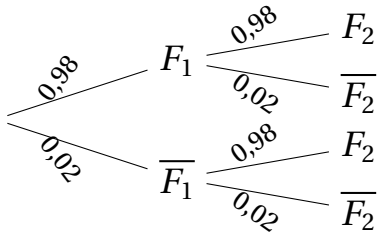
Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Deux ampoules

On note F_1, F_2 les événements « l'ampoule 1 (2) fonctionne ».



La mini-guirlande s'allume si les deux ampoules fonctionnent. Comme elles sont indépendantes :

$$P(F_1 \cap F_2) = 0{,}98 \times 0{,}98 = 0{,}9604.$$

2. Cinquante ampoules

On répète 50 épreuves indépendantes; la guirlande s'allume si les 50 ampoules fonctionnent :

$$P = 0{,}98^{50} \approx 0{,}364.$$

Seulement environ 36 % des guirlandes s'allument, alors que chaque ampoule est fiable à 98 % ! Les petites probabilités de panne s'accumulent.

3. La fiabilité nécessaire

On cherche p tel que $p^{50} \geqslant 0{,}9$, c'est-à-dire $p \geqslant 0{,}9^{\frac{1}{50}} \approx 0{,}99789$.
Chaque ampoule doit fonctionner avec une probabilité d'au moins 0,9979 environ, soit moins de 2,2 ampoules défectueuses pour 1 000.

Pour aller plus loin

Une moitié s'allume avec la probabilité $q = 0{,}98^{25} \approx 0{,}6035$.
Les deux moitiés s'allument avec la probabilité $q^2 = 0{,}98^{50} \approx 0{,}364$ (comme avant).
Aucune ne s'allume avec la probabilité $(1-q)^2 \approx 0{,}157$; donc au moins une moitié s'allume avec la probabilité $1-(1-q)^2 \approx 0{,}843$. Le montage en deux parties rend une panne totale beaucoup moins probable.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Indépendance de deux événements.
— Épreuves indépendantes répétées.
— Événement contraire et calcul d'une probabilité « au moins une ».