# Modélisation quadratique
## Problème de recherche : la fusée à eau

Au club de sciences, on lance une fusée à eau à la verticale. Sa hauteur (en mètres) $t$ secondes après le lancement est modélisée par

$$h(t) = -5t(t-4).$$

### La mission

1. Combien de temps la fusée reste-t-elle en l'air ?
2. À quel instant atteint-elle sa hauteur maximale ? Quelle est cette hauteur ?
3. Un élève filme la fusée avec un drone immobile à 15 m de hauteur. Pendant combien de temps la fusée est-elle au-dessus du drone ?

### Pour aller plus loin

En augmentant la pression dans la fusée, on augmente sa vitesse de départ $v$ (en m/s). La hauteur devient alors $h(t) = -5t^2 + vt$. Quelle vitesse de départ faut-il pour que la fusée atteigne 30 m de hauteur ? Combien de temps volera-t-elle alors ?

### Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

# Éléments de correction

## 1. Durée du vol

$h(t) = 0 \iff -5t(t-4) = 0 \iff t = 0$ ou $t = 4$. La fusée part du sol à $t = 0$ et y retombe à $t = 4$ : elle vole 4 secondes.

## 2. Hauteur maximale

La fonction $h$ est du second degré avec $a = -5 < 0$ : sa courbe est une parabole tournée vers le bas. Le sommet est situé au milieu des racines, en $t = \frac{0+4}{2} = 2$.
$h(2) = -5 \times 2 \times (-2) = 20$ : la fusée atteint 20 m au bout de 2 s.

## 3. Au-dessus du drone

$h(t) = -5t^2 + 20t$. On résout $-5t^2 + 20t = 15 \iff -5t^2 + 20t - 15 = 0 \iff -5(t^2 - 4t + 3) = 0$.
Or $t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3)$ (on vérifie en développant). Donc $h(t) = 15 \iff t = 1$ ou $t = 3$.
D'après la forme de la parabole, $h(t) \geqslant 15$ entre $t = 1$ et $t = 3$ : la fusée est au-dessus du drone pendant 2 secondes.

## Pour aller plus loin

$h(t) = -5t^2 + vt = -5t\left(t - \frac{v}{5}\right)$ : les racines sont 0 et $\frac{v}{5}$, et le sommet est en $t = \frac{v}{10}$.
Hauteur maximale : $h\left(\frac{v}{10}\right) = -5 \times \frac{v^2}{100} + \frac{v^2}{10} = \frac{v^2}{20}$.
$\frac{v^2}{20} = 30 \iff v^2 = 600 \iff v = \sqrt{600} \approx 24{,}5$ m/s (avec $v > 0$). La fusée volerait alors $\frac{v}{5} \approx 4{,}9$ s.

## Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Exploiter la forme factorisée : racines et sommet.
- Forme développée et forme factorisée d'une fonction du second degré.
- Résoudre un problème modélisé par une fonction du second degré.