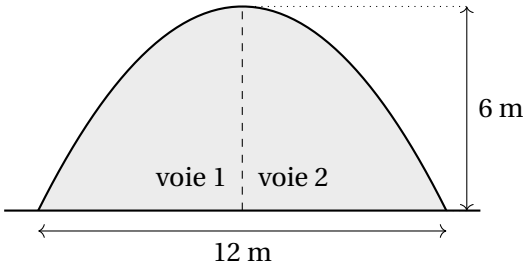
Modélisation quadratique
Problème de recherche : le camion et le tunnel

L'entrée d'un tunnel routier a la forme d'une arche parabolique, de 12 m de large au niveau du sol et de 6 m de haut en son milieu. La route comporte deux voies de 3 m de large, de part et d'autre du milieu du tunnel.



La mission

1. Dans un repère bien choisi, déterminer une fonction h du second degré qui modélise la hauteur de l'arche.
2. Un camion de 2,5 m de large et de 4,4 m de haut roule sur sa voie, à 0,5 m de la ligne centrale. Peut-il passer ?
3. En cas de travaux, on autorise les camions à rouler au milieu du tunnel. Quelle est alors la hauteur maximale d'un camion de 2,5 m de large ?

Pour aller plus loin

Sur quelle largeur la hauteur sous l'arche est-elle d'au moins 4 m ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Le modèle

On place l'origine au pied de l'arche, au milieu de la route, l'axe des abscisses au niveau du sol. L'arche touche le sol en $x = -6$ et $x = 6$: on cherche $h(x) = a(x-6)(x+6)$.

Le sommet est en $x = 0$ (milieu des racines) et $h(0) = 6$: $a \times (-6) \times 6 = 6$, donc $a = -\frac{1}{6}$.

$$h(x) = -\frac{1}{6}(x-6)(x+6) = -\frac{1}{6}x^2 + 6.$$

2. Sur sa voie

Le camion occupe la bande $0{,}5 \leqslant x \leqslant 3$. L'arche est la plus basse au bord extérieur, en $x = 3$ (la parabole descend quand on s'éloigne du milieu) :

$$h(3) = -\frac{1}{6} \times (-3) \times 9 = 4{,}5 \text{ m}.$$

$4{,}5 > 4{,}4$: le camion peut passer, avec seulement 10 cm de marge.

3. Au milieu du tunnel

Le camion occupe alors la bande $-1{,}25 \leqslant x \leqslant 1{,}25$. Le point le plus bas de l'arche au-dessus du camion est en $x = \pm 1{,}25$:

$$h(1{,}25) = -\frac{1}{6} \times 1{,}25^2 + 6 \approx 5{,}74 \text{ m}.$$

Un camion de 2,5 m de large peut mesurer jusqu'à environ 5,74 m de haut.

Pour aller plus loin

$h(x) \geqslant 4 \iff -\frac{1}{6}x^2 + 6 \geqslant 4 \iff x^2 \leqslant 12 \iff -\sqrt{12} \leqslant x \leqslant \sqrt{12}$.

La hauteur est d'au moins 4 m sur une largeur de $2\sqrt{12} \approx 6{,}93$ m.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Forme factorisée $a(x-x_1)(x-x_2)$ d'une fonction du second degré.
- Sommet et axe de symétrie d'une parabole.
- Modéliser une situation géométrique par une fonction du second degré.