Fonctions affines
Problème de recherche : la dilatation des rails

Sur une ancienne voie ferrée, les rails en acier mesurent 30 m à 20 °C. On admet que la longueur d'un rail augmente de 0,36 mm chaque fois que sa température augmente de 1 °C. En France, on considère que la température des rails peut varier de −20 °C en hiver à 50 °C en plein soleil d'été.
Lors de la pose, on laisse un espace (appelé « joint ») entre deux rails consécutifs. Les rails ne doivent jamais se toucher, sinon la voie risque de se déformer.

La mission

1. Exprimer la longueur $L(T)$ d'un rail (en mm) en fonction de sa température T (en °C). Représenter L avec GeoGebra sur $[-20;50]$.
2. De combien un rail s'allonge-t-il entre l'hiver le plus froid et l'été le plus chaud ?
3. Les rails sont posés un jour où leur température est 20 °C. Quelle largeur de joint faut-il laisser pour que les rails se touchent tout juste à 50 °C ? Quelle est alors la largeur du joint à −20 °C ?
4. On note $J(T_p)$ la largeur du joint à prévoir si la pose a lieu à la température T_p. Exprimer $J(T_p)$, puis étudier son sens de variation. Un chantier a lieu un matin d'hiver à 5 °C : quelle largeur prévoir ?

Pour aller plus loin

Une rame passe sur un joint toutes les 30 m. À 108 km/h, combien de chocs (le fameux « tac-tac ») un voyageur entend-il par seconde ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. La longueur du rail

La longueur augmente régulièrement de 0,36 mm par degré : L est affine de coefficient directeur 0,36, et $L(20) = 30\,000$. Donc

$$L(T) = 30\,000 + 0{,}36(T - 20) = 0{,}36\,T + 29\,992{,}8.$$

Dans GeoGebra : `L(x)=0.36x+29992.8` avec `Fonction(L,-20,50)`. La droite semble presque horizontale : les variations sont minuscules par rapport à 30 m.

2. L'allongement maximal

$L(50) - L(-20) = 0{,}36 \times 70 = 25{,}2$ mm : entre l'hiver et l'été, un rail s'allonge d'environ 2,5 cm.

3. Pose à 20 °C

Entre 20 et 50 °C, chaque rail s'allonge de $0{,}36 \times 30 = 10{,}8$ mm. Chaque joint absorbe l'allongement d'une moitié de chacun des deux rails voisins, soit au total l'allongement d'un rail : il faut laisser 10,8 mm.

À −20 °C, les rails ont raccourci de $0{,}36 \times 40 = 14{,}4$ mm par rapport à la pose : le joint mesure $10{,}8 + 14{,}4 = 25{,}2$ mm.

4. Selon la température de pose

$J(T_p) = 0{,}36(50 - T_p) = 18 - 0{,}36\,T_p$, pour $T_p \in [-20\,;50]$. C'est une fonction affine de coefficient directeur négatif : elle est décroissante. Plus il fait chaud lors de la pose, plus le joint doit être étroit.

À 5 °C : $J(5) = 18 - 1{,}8 = 16{,}2$ mm.

Pour aller plus loin

108 km/h = 30 m/s : la rame passe sur un joint par seconde, le voyageur entend environ un « tac-tac » par seconde (un choc par essieu).

Enrichissement : les voies modernes utilisent des longs rails soudés, sans joint ; les rails sont alors maintenus fermement sur les traverses, qui empêchent leur allongement.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Modéliser une situation par une fonction affine, coefficient directeur.
- Expression d'une fonction affine à partir d'un point et du coefficient directeur.
- Sens de variation selon le signe du coefficient directeur.