Application de la dérivation
Problème de recherche : la limite de Betz

Le vent arrive sur une éolienne à la vitesse v_1 et la quitte, ralenti, à la vitesse v_2. On note $x = \frac{v_2}{v_1}$, avec $x \in [0\,;1]$. Un modèle physique montre que la part de la puissance du vent captée par l'éolienne, appelée coefficient de puissance, est

$$C_p(x) = \frac{1}{2}(1+x)(1-x^2).$$

La mission

1. Calculer $C_p(1)$ et interpréter. Calculer $C_p(0)$.
2. Développer $C_p(x)$, puis calculer $C_p'(x)$. Vérifier que $C_p'(x) = -\frac{1}{2}(3x-1)(x+1)$.
3. Étudier les variations de C_p sur $[0\,;1]$. Quelle part maximale de la puissance du vent une éolienne peut-elle capter ? Pour quel ralentissement du vent ?
4. La puissance du vent qui traverse une surface S (en m²) est $P = 0{,}6\,S\,v^3$ (en watts, avec v en m/s). Une éolienne a des pales de 50 m de long. Quelle puissance maximale peut-elle produire avec un vent de 10 m/s ?

Pour aller plus loin

Le vent passe de 10 à 12 m/s. De quel pourcentage la puissance maximale augmente-t-elle ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !