Application de la dérivation
Problème de recherche : la limite de Betz

Le vent arrive sur une éolienne à la vitesse v_1 et la quitte, ralenti, à la vitesse v_2. On note $x = \frac{v_2}{v_1}$, avec $x \in [0\,;1]$. Un modèle physique montre que la part de la puissance du vent captée par l'éolienne, appelée coefficient de puissance, est

$$C_p(x) = \frac{1}{2}(1+x)(1-x^2).$$

La mission

1. Calculer $C_p(1)$ et interpréter. Calculer $C_p(0)$.
2. Développer $C_p(x)$, puis calculer $C_p'(x)$. Vérifier que $C_p'(x) = -\frac{1}{2}(3x-1)(x+1)$.
3. Étudier les variations de C_p sur $[0\,;1]$. Quelle part maximale de la puissance du vent une éolienne peut-elle capter ? Pour quel ralentissement du vent ?
4. La puissance du vent qui traverse une surface S (en m²) est $P = 0{,}6\,S\,v^3$ (en watts, avec v en m/s). Une éolienne a des pales de 50 m de long. Quelle puissance maximale peut-elle produire avec un vent de 10 m/s ?

Pour aller plus loin

Le vent passe de 10 à 12 m/s. De quel pourcentage la puissance maximale augmente-t-elle ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Deux cas extrêmes

$C_p(1) = \frac{1}{2} \times 2 \times 0 = 0$: si le vent n'est pas ralenti ($v_2 = v_1$), l'éolienne ne lui prend aucune énergie.

$C_p(0) = \frac{1}{2}$. Remarque : le modèle n'est pas réaliste pour $x = 0$, car un air complètement arrêté derrière l'éolienne empêcherait l'air suivant de passer.

2. La dérivée

$C_p(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2 + x - x^3) = \frac{1}{2}(1 + x - x^2 - x^3)$, donc

$$C_p'(x) = \frac{1}{2}(1 - 2x - 3x^2).$$

Or $(3x-1)(x+1) = 3x^2 + 2x - 1$, donc $-\frac{1}{2}(3x-1)(x+1) = \frac{1}{2}(1 - 2x - 3x^2) = C_p'(x)$.

3. Le maximum

Sur $[0\,;1]$, $x+1 > 0$, donc $C_p'(x)$ est du signe de $-(3x-1)$: positive sur $\left[0\,;\frac{1}{3}\right]$, négative sur $\left[\frac{1}{3}\,;1\right]$. C_p est croissante puis décroissante, avec un maximum en $x = \frac{1}{3}$:

$$C_p\left(\tfrac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{8}{9} = \frac{16}{27} \approx 0{,}593.$$

Une éolienne capte au plus 59,3 % de la puissance du vent, lorsqu'elle divise sa vitesse par 3.

Remarque historique : ce résultat porte le nom du physicien allemand Albert Betz, qui l'a publié en 1919.

4. Une vraie éolienne

Le rotor balaie un disque de rayon 50 m : $S = \pi \times 50^2 \approx 7\,854$ m². Puissance du vent : $0{,}6 \times 7\,854 \times 10^3 \approx 4{,}71 \times 10^6$ W.

Puissance maximale : $\frac{16}{27} \times 4{,}71 \approx 2{,}8$ MW. En pratique, les pertes (frottements, générateur) réduisent encore cette valeur.

Pour aller plus loin

La puissance est proportionnelle à v^3 : $\left(\frac{12}{10}\right)^3 = 1{,}728$. Elle augmente d'environ 73 % pour un vent seulement 20 % plus fort.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Calcul de la fonction dérivée d'un polynôme.
- Signe de la dérivée et sens de variation.
- Recherche d'un extremum, optimisation.