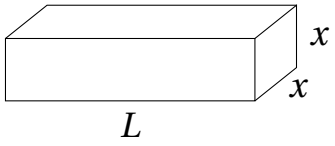
Application de la dérivation
Problème de recherche : le colis le plus volumineux

Un transporteur accepte les colis dont la longueur L ajoutée au tour du colis (le périmètre de sa section) ne dépasse pas 200 cm. On veut expédier un colis en forme de pavé droit à section carrée de côté x (en cm), le plus volumineux possible.



La mission

1. Un colis de section 20×20 et de longueur 1 m est-il accepté ? Quelle est la longueur maximale d'un colis de section 30×30 ?
2. On utilise toute la limite. Exprimer L, puis le volume $V(x)$ en fonction de x. Dans quel intervalle x varie-t-il ?
3. Calculer $V'(x)$, étudier les variations de V et déterminer les dimensions du colis le plus volumineux. Vérifier avec GeoGebra.
4. Quel est ce volume maximal, en litres ? Est-ce le colis le plus long ?

Pour aller plus loin

Un autre transporteur impose que la somme des trois dimensions ne dépasse pas 150 cm. Quel colis à section carrée est alors le plus volumineux ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Deux colis

Section 20×20 : tour 80 cm, $100 + 80 = 180 \leqslant 200$: accepté.
Section 30×30 : tour 120 cm, donc $L \leqslant 200 - 120 = 80$ cm.

2. Le volume

$L + 4x = 200$, donc $L = 200 - 4x$ et $V(x) = x^2(200 - 4x) = 200x^2 - 4x^3$. Il faut $x > 0$ et $L > 0$, soit $x \in]0\,;50[$.

3. L'optimisation

$V'(x) = 400x - 12x^2 = 4x(100 - 3x)$. Sur $]0\,;50[$, $4x > 0$, donc $V'(x)$ a le signe de $100 - 3x$: positif pour $x < \frac{100}{3}$, négatif ensuite. V est croissante puis décroissante, avec un maximum pour $x = \frac{100}{3} \approx 33{,}3$ cm, et alors $L = 200 - \frac{400}{3} = \frac{200}{3} \approx 66{,}7$ cm.
La longueur est le double du côté. GeoGebra (`Extremum(V,0,50)`) donne bien le point $(33{,}33\,;74\,074{,}07)$.

4. Le volume maximal

$V\left(\frac{100}{3}\right) = \frac{10\,000}{9} \times \frac{200}{3} = \frac{2\,000\,000}{27} \approx 74\,074$ cm³, soit environ 74 litres. Ce n'est pas le colis le plus long : un colis très long et très fin a un volume presque nul.

Pour aller plus loin

$L + 2x = 150$, donc $V(x) = x^2(150 - 2x) = 150x^2 - 2x^3$ pour $x \in]0\,;75[$. $V'(x) = 300x - 6x^2 = 6x(50 - x)$: maximum pour $x = 50$, et $L = 50$. Le colis optimal est un cube de 50 cm de côté, soit 125 litres.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Calcul de la fonction dérivée d'un polynôme de degré 3.
- Signe de la dérivée, sens de variation, maximum.
- Résolution d'un problème d'optimisation.