Nombres complexes
Problème de recherche : l'impédance d'un circuit

En courant alternatif, chaque composant d'un circuit est caractérisé par une **impédance** complexe Z (en ohms). L'intensité maximale du courant est $I = \frac{U}{|Z|}$, où U est la tension maximale. On prend $U = 230$ V. (Les électriciens notent j le nombre complexe i, pour ne pas le confondre avec l'intensité.)

— Pour des composants en série, les impédances s'ajoutent : $Z = Z_1 + Z_2$.

— Pour deux composants en parallèle : $Z = \dfrac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$.

Un moteur est modélisé par une résistance de 30 Ω en série avec une bobine d'impédance $40i$.

La mission

1. Donner l'impédance Z_1 du moteur sous forme algébrique, calculer son module et l'intensité maximale du courant.
2. On ajoute en série un condensateur d'impédance $-40i$. Calculer la nouvelle impédance et la nouvelle intensité. Commenter.
3. On place plutôt un condensateur d'impédance $Z_2 = -50i$ en parallèle avec le moteur. Calculer l'impédance Z de l'ensemble sous forme algébrique, puis l'intensité.
4. Vérifier que $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$, puis calculer $|Z_1 Z_2|$ et $|Z_1| \times |Z_2|$. Que remarque-t-on ?

Pour aller plus loin

L'impédance d'un condensateur de capacité C (en farads) est $-\frac{i}{C\omega}$, avec $\omega = 100\pi$ pour le réseau. Quelle capacité donne l'impédance $-40i$?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Le moteur seul

$Z_1 = 30 + 40i$, $|Z_1| = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\ \Omega$ et $I = \frac{230}{50} = 4{,}6$ A.

2. Un condensateur en série

$Z = 30 + 40i - 40i = 30$, $|Z| = 30$ et $I = \frac{230}{30} \approx 7{,}7$ A. Le condensateur compense exactement la bobine : l'impédance est réelle et minimale, l'intensité augmente. On parle de résonance.

3. Un condensateur en parallèle

$Z_1 Z_2 = (30+40i)(-50i) = -1\,500i - 2\,000i^2 = 2\,000 - 1\,500i$ et $Z_1 + Z_2 = 30 - 10i$. On multiplie par le conjugué $30 + 10i$:

$$Z = \frac{(2\,000 - 1\,500i)(30 + 10i)}{(30 - 10i)(30 + 10i)} = \frac{60\,000 + 20\,000i - 45\,000i + 15\,000}{900 + 100} = 75 - 25i.$$

$|Z| = \sqrt{75^2 + 25^2} = \sqrt{6\,250} \approx 79{,}1\ \Omega$ et $I = \frac{230}{79{,}1} \approx 2{,}9$ A.

4. Conjugués et modules

$\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{30 - 10i} = 30 + 10i$ et $\overline{Z_1} + \overline{Z_2} = (30 - 40i) + 50i = 30 + 10i$: égalité vérifiée.
$|Z_1 Z_2| = |2\,000 - 1\,500i| = \sqrt{6\,250\,000} = 2\,500$ et $|Z_1| \times |Z_2| = 50 \times 50 = 2\,500$. Le module d'un produit est le produit des modules.

Pour aller plus loin

$\frac{1}{C\omega} = 40$, donc $C = \frac{1}{40 \times 100\pi} \approx 7{,}96 \times 10^{-5}$ F, soit environ 80 μF.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Forme algébrique, somme et produit de nombres complexes.
- Conjugué et calcul d'un quotient.
- Module d'un nombre complexe.