Nombres complexes
Problème de recherche : multiplier avec trois multiplications

On veut calculer $(a+ib)(c+id)$ où a, b, c et d sont des réels. Dans un processeur, une multiplication de deux nombres prend plus de temps qu'une addition ou une soustraction. On cherche donc à faire le moins de multiplications possible.
On propose de calculer seulement trois produits :

$$k_1 = c(a+b), \qquad k_2 = a(d-c), \qquad k_3 = b(c+d).$$

La mission

1. Calculer $(3+2i)(5+4i)$ sous forme algébrique. Dans le cas général, combien de multiplications de réels la méthode habituelle demande-t-elle ?
2. Calculer k_1, k_2 et k_3 pour $a=3$, $b=2$, $c=5$ et $d=4$. Comment retrouver le résultat de la question 1 à partir de ces trois nombres ?
3. Démontrer que cette méthode fonctionne pour tous les réels a, b, c, d. Combien d'additions ou de soustractions demande-t-elle ?
4. Écrire deux fonctions Python `produit4(a,b,c,d)` et `produit3(a,b,c,d)` qui renvoient la partie réelle et la partie imaginaire du produit. Les tester sur plusieurs exemples.

Pour aller plus loin

Pour calculer le carré $(a+ib)^2$, montrer qu'il suffit de deux multiplications de réels.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !



Éléments de correction

1. La méthode habituelle

$(3+2i)(5+4i) = 15+12i+10i+8i^2 = 7+22i$. En général :

$$(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc).$$

Il faut 4 multiplications (ac, bd, ad, bc) et 2 additions ou soustractions.

2. Trois produits

$k_1 = 5\times 5 = 25$, $k_2 = 3\times(-1) = -3$, $k_3 = 2\times 9 = 18$. On remarque que $k_1 - k_3 = 7$ et $k_1 + k_2 = 22$: on retrouve $7+22i$.

3. Le cas général

$k_1 - k_3 = ca+cb-bc-bd = ac-bd$, la partie réelle ;
$k_1 + k_2 = ca+cb+ad-ac = ad+bc$, la partie imaginaire.
La méthode demande 3 multiplications et 5 additions ou soustractions ($a+b$, $d-c$, $c+d$, k_1-k_3, k_1+k_2). On échange une multiplication contre trois additions : c'est intéressant lorsque les multiplications sont beaucoup plus coûteuses, par exemple pour de très grands nombres ou pour des calculs répétés des millions de fois en traitement du signal.

4. En Python

```
def produit4(a, b, c, d):
    return a*c - b*d, a*d + b*c
def produit3(a, b, c, d):
    k1 = c*(a + b)
    k2 = a*(d - c)
    k3 = b*(c + d)
    return k1 - k3, k1 + k2
```

`produit3(3, 2, 5, 4)` et `produit4(3, 2, 5, 4)` renvoient tous deux `(7, 22)` ; de même sur d'autres exemples, comme `(1, -2, 0.5, 3)` qui donne `(6.5, 2.0)`.

Pour aller plus loin

$(a+ib)^2 = (a^2-b^2)+2abi$. Or $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$: une multiplication. Puis $2ab$ s'obtient avec la multiplication ab, suivie d'une addition $ab+ab$. Deux multiplications suffisent.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Forme algébrique, produit de deux nombres complexes, $i^2 = -1$.
- Partie réelle et partie imaginaire.