Nombres complexes
Problème de recherche : la spirale du drone de recherche

Pour retrouver un randonneur perdu, un drone de secours part du point d'affixe $z_0 = 1$ (unité : 10 m) et visite successivement les points d'affixes

$$z_{n+1} = (1 + \mathrm{i})\, z_n.$$

Le poste de commandement est à l'origine O du repère.

La mission

1. Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 et placer les points. Décrire la trajectoire : comment passe-t-on d'un point au suivant ?
2. La zone de recherche est un disque de centre O et de rayon 1 km. À partir de quelle étape le drone sort-il de la zone ? Où se trouve-t-il alors ?
3. Pour quelles étapes le drone se trouve-t-il exactement à l'est du poste (sur la demi-droite des réels positifs) ?

Pour aller plus loin

La spirale s'écarte trop vite. Proposer un nombre complexe a tel que la suite $z_{n+1} = a\, z_n$ fasse tourner le drone du même angle à chaque étape, mais n'augmente sa distance au poste que de 10 % à chaque étape.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Premiers points

$z_1 = 1+\mathrm{i}$; $z_2 = (1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$; $z_3 = 2\mathrm{i}(1+\mathrm{i}) = -2+2\mathrm{i}$; $z_4 = (-2+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = -4$.
$1+\mathrm{i}$ a pour module $\sqrt{2}$ et pour argument $\frac{\pi}{4}$. Multiplier par $1+\mathrm{i}$ multiplie le module par $\sqrt{2}$ et ajoute $\frac{\pi}{4}$ à l'argument : **à chaque étape, le drone tourne de 45° autour du poste et s'en éloigne d'un facteur** $\sqrt{2}$. La trajectoire est une spirale.

2. Sortie de la zone

$|z_n| = \left(\sqrt{2}\right)^n$. 1 km = 100 unités : on cherche $\left(\sqrt{2}\right)^n > 100$, soit $2^n > 10\,000$: $2^{13} = 8\,192$ et $2^{14} = 16\,384$. **Le drone sort de la zone à l'étape 14**, à $\sqrt{2}^{14} = 2^7 = 128$ unités, soit 1,28 km.
$\arg z_{14} = 14 \times \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2}$: $z_{14} = -128\mathrm{i}$. Le drone est **1,28 km au sud** du poste. (On peut aussi écrire $z_{14} = \left((1+\mathrm{i})^2\right)^7 = (2\mathrm{i})^7 = 128\,\mathrm{i}^7 = -128\mathrm{i}$.)

3. À l'est du poste

z_n est un réel positif quand son argument est un multiple de 2π : $n \times \frac{\pi}{4} = 2k\pi$, soit n **multiple de 8** ($z_8 = 16$, $z_{16} = 256\ldots$).

Pour aller plus loin

On veut $|a| = 1{,}1$ et $\arg a = \frac{\pi}{4}$: $a = 1{,}1\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1{,}1 \times \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}) \approx 0{,}778 + 0{,}778\,\mathrm{i}$.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Module et argument d'un produit ; forme trigonométrique.
- Interprétation géométrique de la multiplication par un complexe (rotation et homothétie).