Nombres complexes
Problème de recherche : le moteur pas à pas

Le rotor d'un moteur pas à pas tourne d'un angle fixe à chaque impulsion électrique. On repère la position d'un point du rotor par un nombre complexe z_n après n impulsions, avec $z_0 = 1$ et

$$z_{n+1} = \omega\, z_n, \qquad \text{où} \qquad \omega = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

La mission

1. Déterminer le module et un argument de ω. De quel angle le rotor tourne-t-il à chaque impulsion ?
2. Calculer z_1 et z_2 sous forme algébrique. Quels sont le module et un argument de z_n ? Au bout de combien d'impulsions le rotor revient-il à sa position initiale ?
3. Écrire un programme Python qui calcule et affiche les termes z_0 à z_{12}, ainsi que leurs modules. Le résultat confirme-t-il la question 2 ?
4. Un programmeur pressé utilise la valeur arrondie $\omega \approx 0{,}87 + 0{,}5i$. Que devient le module de z_n après 12 impulsions ? Après 1 200 impulsions ? Que conclure ?

Pour aller plus loin

Un moteur courant fait 200 pas par tour. Quel nombre complexe ω, sous forme trigonométrique, faut-il utiliser ? Que vaut z_{50} ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Le nombre ω

$|\omega| = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2}$, donc $\arg\omega = \frac{\pi}{6}$. À chaque impulsion, le rotor tourne de $\frac{\pi}{6}$, soit 30°.

2. Les positions

$z_1 = \omega = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $z_2 = \omega^2 = \frac{3}{4} + 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}i + \frac{1}{4}i^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Le module d'un produit est le produit des modules : $|z_n| = |\omega|^n \times |z_0| = 1$. Un argument d'un produit est la somme des arguments : $\arg z_n = n\frac{\pi}{6}$. Le rotor revient à sa position initiale quand $n\frac{\pi}{6} = 2\pi$, soit après 12 impulsions.

3. En Python

```
from math import sqrt
w = sqrt(3)/2 + 0.5j
z = 1
for n in range(13):
    print(n, z, abs(z))
    z = w*z
```

On obtient $z_3 \approx i$, $z_6 \approx -1$, $z_{12} \approx 1$ et des modules égaux à 1 (aux erreurs d'arrondi près, de l'ordre de 10^{-15}).

4. L'arrondi

$|0{,}87 + 0{,}5i| = \sqrt{0{,}7569 + 0{,}25} = \sqrt{1{,}0069} \approx 1{,}00344$. Donc $|z_n| \approx 1{,}00344^n$:

$$|z_{12}| \approx 1{,}04 \qquad \text{et} \qquad |z_{1\,200}| \approx 61{,}9.$$

Au lieu de tourner sur un cercle, le point calculé s'éloigne en spirale. Une erreur d'arrondi minuscule sur le module, répétée des milliers de fois, devient énorme : il faut un module exactement égal à 1, ou recalculer la position à partir de n (par $\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}$).

Pour aller plus loin

Un pas vaut $\frac{2\pi}{200} = \frac{\pi}{100}$ (soit 1,8°) : $\omega = \cos\frac{\pi}{100} + i\sin\frac{\pi}{100}$.

z_{50} a pour module 1 et pour argument $50\times\frac{\pi}{100} = \frac{\pi}{2}$: $z_{50} = i$, un quart de tour.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Module et argument d'un nombre complexe, forme trigonométrique.
- Module et argument d'un produit.
- Nombres complexes en Python.