Dérivation
Problème de recherche : l'ascenseur confortable

Un ascenseur de grande tour doit monter de 80 m. L'ingénieur choisit la loi de mouvement suivante : la hauteur (en m) à l'instant t (en s) est

$$h(t) = 80\left(3\left(\frac{t}{T}\right)^2 - 2\left(\frac{t}{T}\right)^3\right) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T),$$

où T est la durée du trajet, en secondes.

La mission

1. Vérifier que l'ascenseur part bien du rez-de-chaussée, arrive à 80 m, et qu'il démarre et s'arrête sans à-coup (vitesse nulle au départ et à l'arrivée).
2. Pour le confort des passagers, la vitesse ne doit pas dépasser 4 m/s. Quelle est la durée minimale du trajet ?

Pour aller plus loin

Pour $T = 30$ s, comparer avec un ascenseur qui monterait à vitesse constante. Pourquoi les ascenseurs ne fonctionnent-ils pas ainsi ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Vérifications

$h(0) = 0$ et $h(T) = 80(3-2) = 80$: l'ascenseur part de 0 et arrive à 80 m.
En développant : $h(t) = \frac{240}{T^2}t^2 - \frac{160}{T^3}t^3$. La vitesse est la dérivée :

$$v(t) = h'(t) = \frac{480}{T^2}t - \frac{480}{T^3}t^2 = \frac{480}{T^3}t(T-t).$$

$v(0) = 0$ et $v(T) = 0$: **départ et arrêt en douceur**.

2. Vitesse maximale

$v(t)$ est un polynôme du second degré en t, de racines 0 et T, tourné vers le bas : il est maximal au milieu, en $t = \frac{T}{2}$.

$$v\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{480}{T^3} \times \frac{T}{2} \times \frac{T}{2} = \frac{120}{T}.$$

Condition : $\frac{120}{T} \leqslant 4 \iff T \geqslant 30$. **Le trajet doit durer au moins 30 secondes.**

Pour aller plus loin

À vitesse constante, il faudrait $\frac{80}{30} \approx 2{,}67$ m/s, mais la vitesse passerait brutalement de 0 à 2,67 m/s au départ : accélération « infinie », choc désagréable et dangereux. Avec la loi choisie, la vitesse monte progressivement jusqu'à 4 m/s à mi-parcours, puis redescend.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Dérivée d'un polynôme ; interprétation de la dérivée comme une vitesse.
- Maximum d'une fonction polynôme du second degré.

Pour aller plus loin (enrichissement)

Les ascenseurs modernes limitent aussi la variation de l'accélération (le « jerk »), avec des lois de mouvement de degré plus élevé.