Dérivation
Problème de recherche : radar fixe ou radar tronçon

Sur une autoroute limitée à 110 km/h, une voiture arrive trop vite et freine progressivement. Sa position (en mètres) au bout de t secondes est

$$x(t) = 36\,t - 0{,}1\,t^2 \qquad \text{pour } t \in [0\,;60].$$

Un **radar tronçon** mesure le temps mis pour parcourir la portion de route parcourue entre $t = 0$ et $t = 60$ et en déduit la vitesse moyenne. Un **radar fixe**, placé à 350 m du début de la portion, mesure la vitesse instantanée au moment du passage.
On rappelle que 1 m/s = 3,6 km/h.

La mission

1. Quelle distance la voiture parcourt-elle en 60 s ? Est-elle sanctionnée par le radar tronçon ?
2. À quel instant la voiture passe-t-elle devant le radar fixe ? En calculant la limite d'un taux de variation, déterminer sa vitesse instantanée à cet instant. Le radar fixe la sanctionne-t-il ?
3. Calculer le nombre dérivé $x'(a)$ pour tout instant a de $[0\,;60]$. À partir de quel instant et de quelle position la voiture respecte-t-elle la limitation ? Où aurait-il fallu placer le radar fixe pour qu'elle ne soit pas sanctionnée ?
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de x au point d'abscisse 10. Interpréter cette droite.

Pour aller plus loin

Un conducteur est sanctionné par un radar tronçon. Peut-il affirmer qu'il n'a jamais dépassé la vitesse limite ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Le radar tronçon

$x(60) = 2\,160 - 360 = 1\,800$ m. Vitesse moyenne : $\frac{1\,800}{60} = 30$ m/s, soit 108 km/h. Le radar tronçon ne la sanctionne pas.

2. Le radar fixe

$x(10) = 360 - 10 = 350$: la voiture passe devant le radar à $t = 10$ s. Pour $h \neq 0$:

$$\frac{x(10+h) - x(10)}{h} = \frac{36h - 0{,}1(20h + h^2)}{h} = \frac{34h - 0{,}1h^2}{h} = 34 - 0{,}1h.$$

Quand h tend vers 0, ce taux tend vers 34 : $x'(10) = 34$ m/s, soit 122,4 km/h. Le radar fixe la sanctionne.

3. Vitesse à chaque instant

De même, $\frac{x(a+h)-x(a)}{h} = \frac{36h-0{,}1(2ah+h^2)}{h} = 36-0{,}2a-0{,}1h$, qui tend vers $36-0{,}2a$. Donc $x'(a) = 36 - 0{,}2a$.

110 km/h $= \frac{110}{3{,}6} \approx 30{,}56$ m/s. $36 - 0{,}2a \leqslant 30{,}56 \iff a \geqslant 27{,}2$ environ. La voiture respecte la limitation à partir de $t \approx 27{,}2$ s, à la position $x(27{,}2) \approx 905$ m. Un radar fixe placé à plus de 905 m du début ne l'aurait pas sanctionnée.

4. La tangente

$y = x'(10)(t - 10) + x(10) = 34(t - 10) + 350 = 34t + 10$. C'est la position qu'aurait la voiture si, à partir de $t = 10$, elle roulait à vitesse constante 34 m/s, sans freiner. Près de $t = 10$, elle est très proche de la vraie position.

Pour aller plus loin

Non. Si sa vitesse était restée inférieure ou égale à la limite à chaque instant, sa vitesse moyenne aurait elle aussi été inférieure à la limite. Une vitesse moyenne trop élevée prouve qu'il a dépassé la limite au moins à un instant.

Enrichissement : cette idée correspond à un théorème d'analyse, l'inégalité des accroissements finis.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Taux de variation entre a et $a + h$, nombre dérivé comme limite.
- Interprétation du nombre dérivé comme vitesse instantanée.
- Équation de la tangente $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.