Dérivation
Problème de recherche : l'erreur de mesure

Un radiateur électrique est une résistance $R = 50\ \Omega$. La puissance qu'il consomme sous une tension U (en volts) est

$$P = f(U) = \frac{U^2}{50} \quad \text{(en watts)}.$$

On mesure $U = 230$ V avec un multimètre dont la précision est de 2 % : la vraie tension est comprise entre $230 - 4{,}6$ et $230 + 4{,}6$ V.

La mission

1. Calculer $f(230)$. Déterminer le nombre dérivé $f'(230)$ à l'aide d'un taux de variation.
2. Écrire l'approximation affine de $f(230+h)$ pour h proche de 0. En déduire une estimation de l'erreur sur la puissance si la tension est fausse de 4,6 V.
3. À l'aide d'un tableur, comparer pour h allant de -5 à 5 la valeur exacte $f(230+h)$ et l'approximation affine. L'approximation est-elle bonne ?
4. Quelle est l'erreur sur P en pourcentage ? On écrit $U = 230(1+k)$; montrer que pour k petit, $P \approx f(230) \times (1+2k)$. Énoncer une règle.

Pour aller plus loin

Le volume d'une bille d'acier est $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. On mesure son rayon à 1 % près. Quelle est, environ, la précision sur son volume ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Puissance et nombre dérivé

$f(230) = \frac{52\,900}{50} = 1\,058$ W. Pour $h \neq 0$:

$$\frac{f(230+h)-f(230)}{h} = \frac{(230+h)^2 - 230^2}{50h} = \frac{460h+h^2}{50h} = \frac{460+h}{50},$$

qui tend vers $\frac{460}{50} = 9{,}2$ quand h tend vers 0. Donc $f'(230) = 9{,}2$ (watts par volt).

2. Approximation affine

$f(230+h) \approx 1\,058 + 9{,}2h$. Pour $h = \pm 4{,}6$: l'erreur sur P est d'environ $9{,}2 \times 4{,}6 \approx 42$ W.

3. Comparaison au tableur

h	-5	-2	0	2	5
$f(230+h)$	1012,5	1039,68	1058	1076,48	1104,5
$1058 + 9{,}2h$	1012	1039,6	1058	1076,4	1104

L'écart est exactement $\frac{h^2}{50}$, au plus 0,5 W : l'approximation est excellente. Pour $h = 4{,}6$, la valeur exacte est 1 100,74 W (écart 42,7 W).

4. La règle

$\frac{42}{1\,058} \approx 4\,\%$: une erreur de 2 % sur U donne environ 4 % d'erreur sur P.

$P = \frac{230^2(1+k)^2}{50} = 1\,058(1+2k+k^2)$. Pour k petit, k^2 est négligeable (pour $k = 0{,}02$, $k^2 = 0{,}000\,4$) : $P \approx 1\,058(1+2k)$.

Règle : quand une grandeur dépend du carré d'une mesure, l'erreur relative est environ doublée.

Pour aller plus loin

$(1+k)^3 = 1 + 3k + 3k^2 + k^3 \approx 1 + 3k$: une erreur de 1 % sur le rayon donne environ 3 % d'erreur sur le volume.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Nombre dérivé comme limite d'un taux de variation.
- Approximation affine $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$.