Généralités sur les fonctions
Problème de recherche : la puissance d'une éolienne

La documentation technique d'une éolienne de 2 MW indique son fonctionnement en fonction de la vitesse du vent v (en m/s) :

— pour $v < 3$: le vent est trop faible, l'éolienne ne produit rien ;
— pour $3 \leqslant v \leqslant 12$: la puissance (en MW) est $P(v) = k\,v^3$, où k est une constante ;
— pour $12 < v \leqslant 25$: la puissance est limitée à sa valeur nominale, 2 MW ;
— pour $v > 25$: l'éolienne est mise à l'arrêt par sécurité.

La mission

1. Déterminer k (on admet que la puissance ne fait pas de saut en $v = 12$), puis tracer la courbe de puissance de l'éolienne pour $0 \leqslant v \leqslant 30$.
2. Un technicien affirme : « Quand la vitesse du vent double, l'éolienne produit deux fois plus. » Est-ce vrai ?
3. À partir de quelle vitesse de vent l'éolienne fournit-elle au moins la moitié de sa puissance nominale ?

Pour aller plus loin

Sur une journée, le vent souffle à 6 m/s pendant 12 heures et à 12 m/s pendant 12 heures. Quelle énergie (en MWh) l'éolienne produit-elle ? Comparer avec une journée de vent régulier à 9 m/s.

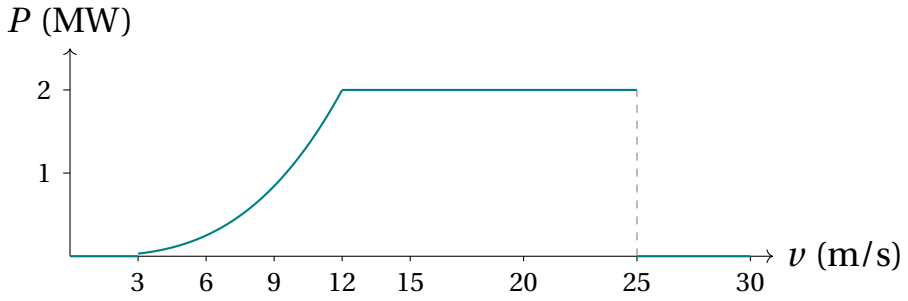
Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. La constante k et la courbe

Pas de saut en 12 : $k \times 12^3 = 2$, donc $k = \frac{2}{1728} \approx 0{,}001157$. La fonction P est définie par morceaux : 0 sur $[0\,;3[$, kv^3 sur $[3\,;12]$, 2 sur $]12\,;25]$, 0 au-delà. Valeurs utiles : $P(3) \approx 0{,}03$; $P(6) = 0{,}25$; $P(9) \approx 0{,}84$; $P(12) = 2$.



2. Le vent double

$P(2v) = k(2v)^3 = 8kv^3 = 8P(v)$ tant que $2v \leqslant 12$: par exemple $P(6) = 0{,}25$ MW et $P(3) \approx 0{,}03$ MW. **Quand le vent double, la puissance est multipliée par 8**, pas par 2 (dans la zone $3 \leqslant v \leqslant 12$). C'est faux aussi au-delà de 12 m/s, où la puissance plafonne.

3. La moitié de la puissance nominale

$kv^3 \geqslant 1 \iff v^3 \geqslant 864 \iff v \geqslant \sqrt[3]{864} = \frac{12}{\sqrt[3]{2}} \approx 9{,}52$ m/s (soit environ 34 km/h).

Pour aller plus loin

Énergie : $0{,}25 \times 12 + 2 \times 12 = 27$ MWh. Avec un vent régulier à 9 m/s : $P(9) \approx 0{,}84$ MW, soit environ 20,3 MWh. Même vitesse moyenne (9 m/s), mais le vent irrégulier produit plus : à cause du cube, les rafales comptent beaucoup.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Fonction définie par morceaux; fonction cube; représentation graphique.
- Résoudre graphiquement ou par le calcul une inéquation $x^3 \geqslant a$.