Primitives
Problème de recherche : le freinage du TGV

Un TGV roule à 300 km/h quand le conducteur déclenche un freinage d'urgence à l'instant $t = 0$. Les freins se renforçant progressivement, l'accélération du train (en m/s^2) est modélisée par

$$a(t) = -(0{,}3 + 0{,}01\,t),$$

où t est le temps en secondes, jusqu'à l'arrêt du train.

La mission

1. Combien de temps le TGV met-il pour s'arrêter ?
2. Quelle distance parcourt-il pendant le freinage ? Le conducteur aperçoit un obstacle à 5 km : le train s'arrêtera-t-il à temps ?

Pour aller plus loin

Comparer avec une voiture à 130 km/h qui freine avec une décélération constante de 8 m/s^2. Pourquoi les signaux ferroviaires sont-ils placés plusieurs kilomètres avant les obstacles ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

Vitesse

La vitesse v (en m/s) est une primitive de l'accélération, avec $v(0) = \frac{300}{3{,}6} \approx 83{,}33$ m/s :

$$v(t) = 83{,}33 - 0{,}3\,t - 0{,}005\,t^2.$$

1. Durée du freinage

$v(t) = 0 \iff 0{,}005t^2 + 0{,}3t - 83{,}33 = 0$. $\Delta = 0{,}09 + 4 \times 0{,}005 \times 83{,}33 \approx 1{,}757$, racine positive $t = \frac{-0{,}3+\sqrt{1{,}757}}{0{,}01} \approx 102{,}5$ s.

Le TGV s'arrête en environ 102,5 secondes (plus d'une minute et demie).

2. Distance de freinage

La position x (en m) est une primitive de v, avec $x(0) = 0$:

$$x(t) = 83{,}33\,t - 0{,}15\,t^2 - \frac{t^3}{600}.$$

$x(102{,}5) \approx 8\,541 - 1\,576 - 1\,795 \approx 5\,170$ m. **Distance de freinage : environ 5,2 km.** L'obstacle à 5 km serait percuté (le train atteint $x = 5\,000$ m vers $t \approx 86$ s, à environ 20 m/s, soit plus de 70 km/h).

Pour aller plus loin

Voiture : $v_0 = \frac{130}{3{,}6} \approx 36{,}1$ m/s ; $v(t) = 36{,}1 - 8t$ s'annule en $t \approx 4{,}5$ s ; $x(t) = 36{,}1\,t - 4\,t^2$ donne $x(4{,}5) \approx 81$ m. Le TGV a besoin de 60 fois plus de distance : le contact acier sur acier adhère peu et le train est très lourd. Le conducteur ne peut pas freiner « à vue » : la signalisation doit anticiper plusieurs kilomètres à l'avance.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Primitives d'une fonction polynôme ; primitive vérifiant une condition initiale.
- Lien accélération – vitesse – position ; équation du second degré.