Probabilités conditionnelles
Problème de recherche : doubler la pompe ?

Le refroidissement d'une salle de serveurs informatiques repose sur une pompe à eau. Si le refroidissement s'arrête, les serveurs doivent être coupés. Le responsable technique hésite entre deux solutions :

— **Solution A** : une pompe haut de gamme, qui fonctionne toute l'année sans panne avec une probabilité de 0,995 ;

— **Solution B** : deux pompes ordinaires montées en parallèle (le refroidissement fonctionne si au moins une pompe fonctionne). Chaque pompe tombe en panne dans l'année avec une probabilité de 0,02.

La mission

1. On suppose que les pannes des deux pompes de la solution B sont indépendantes. Quelle solution est la plus fiable ?
2. En réalité, quand une pompe tombe en panne, l'autre doit fonctionner seule à pleine charge : elle tombe alors en panne avec une probabilité de 0,3. La conclusion change-t-elle ?

Pour aller plus loin

Le refroidissement est en panne. Dans la situation de la question 2 avec la solution B, quelle est la probabilité que ce soit la pompe 1 qui soit tombée en panne en premier ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Pannes indépendantes

On note D_1, D_2 : « la pompe 1 (resp. 2) tombe en panne ». Le refroidissement s'arrête si les deux pompes sont en panne :

$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P(D_2) = 0{,}02^2 = 0{,}0004.$$

Fiabilité de B : $1-0{,}0004 = 0{,}9996$, contre 0,995 pour A. **La solution B est plus fiable** (12 fois moins de risques de panne : 0,0004 contre 0,005).

2. Pannes dépendantes

Maintenant $P_{D_1}(D_2) = 0{,}3$: les événements ne sont plus indépendants.

$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P_{D_1}(D_2) = 0{,}02 \times 0{,}3 = 0{,}006.$$

Fiabilité de B : $1 - 0{,}006 = 0{,}994 < 0{,}995$. **La conclusion s'inverse : la pompe haut de gamme devient (légèrement) plus fiable.**

En réalité les deux pompes peuvent tomber en panne « en premier » : un arbre plus précis donnerait un risque proche de $2 \times 0{,}02 \times 0{,}3 = 0{,}012$, ce qui renforce la conclusion. Les ingénieurs appellent ce phénomène une *défaillance de mode commun* : la redondance ne protège que si les pannes sont vraiment indépendantes.

Pour aller plus loin

Par symétrie entre les deux pompes, la probabilité que ce soit la pompe 1 qui soit tombée en panne en premier est $\frac{1}{2}$.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Probabilité d'une intersection : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$; arbre pondéré.
- Événements indépendants ; événement contraire.

Pour aller plus loin (enrichissement)

La *sûreté de fonctionnement* est une discipline d'ingénierie (aéronautique, nucléaire, ferroviaire) qui calcule ce type de probabilités pour des systèmes de milliers de composants.