Probabilités conditionnelles
Problème de recherche : la pièce défectueuse

Un atelier d'usinage fabrique des axes de moteur sur deux machines :

— la machine A, récente, produit 60 % des pièces, dont 2 % sont défectueuses ;
— la machine B, plus ancienne, produit les autres pièces, dont 5 % sont défectueuses.

On prélève une pièce au hasard dans la production. On note A l'événement « la pièce vient de la machine A », B l'événement « elle vient de la machine B » et D l'événement « elle est défectueuse ».

La mission

1. Construire un arbre pondéré, puis calculer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse.
2. Une pièce défectueuse est trouvée au contrôle. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de la machine B ? Commenter.
3. Les événements A et D sont-ils indépendants ?
4. Le budget permet d'améliorer une seule machine : soit A, dont le taux de défauts passerait à 1 %, soit B, dont le taux passerait à 3 %. Quel choix réduit le plus la proportion de pièces défectueuses ?

Pour aller plus loin

Quel taux de défauts faudrait-il pour la machine B pour que les événements A et D soient indépendants ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Probabilité d'un défaut

L'arbre a deux premières branches $P(A) = 0{,}6$ et $P(B) = 0{,}4$, puis $P_A(D) = 0{,}02$ et $P_B(D) = 0{,}05$. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0{,}6 \times 0{,}02 + 0{,}4 \times 0{,}05 = 0{,}012 + 0{,}02 = 0{,}032.$$

3,2 % des pièces sont défectueuses.

2. D'où vient la pièce défectueuse ?

$$P_D(B) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}02}{0{,}032} = 0{,}625.$$

La machine B ne produit que 40 % des pièces, mais elle est à l'origine de 62,5 % des pièces défectueuses.

3. Indépendance

$P(A) \times P(D) = 0{,}6 \times 0{,}032 = 0{,}0192$, alors que $P(A \cap D) = 0{,}012$. Ces nombres sont différents : A et D ne sont pas indépendants. Savoir de quelle machine vient la pièce modifie la probabilité qu'elle soit défectueuse.

4. Quelle machine améliorer ?

Si l'on améliore A : $P(D) = 0{,}6 \times 0{,}01 + 0{,}4 \times 0{,}05 = 0{,}026$.
Si l'on améliore B : $P(D) = 0{,}6 \times 0{,}02 + 0{,}4 \times 0{,}03 = 0{,}024$.
Il vaut mieux améliorer la machine B, bien qu'elle produise moins de pièces.

Pour aller plus loin

On note t le taux de défauts de B : $P(D) = 0{,}012 + 0{,}4t$. L'indépendance s'écrit $0{,}012 = 0{,}6(0{,}012 + 0{,}4t)$, soit $0{,}0048 = 0{,}24t$, d'où $t = 0{,}02$. Il faut que les deux machines aient le même taux de défauts.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Arbre pondéré, probabilité conditionnelle $P_A(B)$.
— Formule des probabilités totales.
— Indépendance de deux événements.