Probabilités conditionnelles
Problème de recherche : le vote à deux contre un

Un capteur de vitesse d'avion donne une mesure fausse avec une probabilité de 0,01 pendant un vol. On suppose d'abord que les capteurs se trompent indépendamment les uns des autres, et que deux capteurs faux donnent des valeurs différentes.

— Avec **deux capteurs**, si les mesures ne concordent pas, le système ne peut pas savoir lequel croire : il signale une panne.

— Avec **trois capteurs**, le système retient la valeur donnée par au moins deux capteurs (vote « deux contre un »).

La mission

1. Avec un seul capteur, quelle est la probabilité que la mesure utilisée soit fausse ?
2. Avec deux capteurs, calculer la probabilité que les deux mesures soient correctes, puis la probabilité que le système signale une panne.
3. Avec trois capteurs, calculer la probabilité que le vote donne la bonne valeur. Combien de fois le risque d'erreur est-il plus petit qu'avec un seul capteur ?
4. En réalité, les capteurs ne sont pas toujours indépendants. On suppose qu'un givrage, de probabilité 0,001 par vol, rend les trois capteurs faux en même temps ; sans givrage, ils se trompent indépendamment avec la probabilité 0,01. Que devient la probabilité d'erreur du vote ? Commenter.

Pour aller plus loin

Pourquoi les ingénieurs utilisent-ils souvent des capteurs de technologies différentes ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Un seul capteur

La mesure est fausse avec la probabilité 0,01.

2. Deux capteurs

Par indépendance, les deux mesures sont correctes avec la probabilité $0{,}99^2 = 0{,}9801$. Le système signale une panne si exactement un capteur est faux : $2 \times 0{,}99 \times 0{,}01 = 0{,}0198$. Les deux capteurs sont faux avec la probabilité $0{,}01^2 = 0{,}0001$ (et, avec des valeurs différentes, une panne est aussi signalée).

Deux capteurs permettent de détecter une erreur, mais pas de la corriger : environ deux vols sur cent avec une alarme.

3. Trois capteurs

Le vote est correct si au moins deux capteurs sont corrects. Dans l'arbre à trois niveaux, il y a un chemin avec trois capteurs corrects et trois chemins avec exactement un capteur faux :

$$P = 0{,}99^3 + 3 \times 0{,}99^2 \times 0{,}01 = 0{,}970\,299 + 0{,}029\,403 = 0{,}999\,702.$$

Le risque d'erreur est 0,000 298, environ $\frac{0{,}01}{0{,}000\,298} \approx 34$ fois plus petit qu'avec un seul capteur.

4. Une cause commune

On construit un arbre qui commence par « givrage » (0,001) ou « pas de givrage » (0,999). Avec givrage, le vote est faux à coup sûr ; sans givrage, il est faux avec la probabilité 0,000 298. Par la formule des probabilités totales :

$$P(\text{erreur}) = 0{,}001 \times 1 + 0{,}999 \times 0{,}000\,298 \approx 0{,}0013.$$

Le risque est multiplié par plus de 4 : c'est la cause commune qui domine. Tripler les capteurs ne protège pas d'une panne qui les touche tous en même temps.

Pour aller plus loin

Des capteurs de technologies différentes ont peu de chances d'être perturbés par la même cause : leurs pannes sont plus proches de l'indépendance.

Remarque : en 2009, le givrage de sondes de vitesse a été l'un des éléments à l'origine de l'accident du vol Rio-Paris AF447.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Arbre pondéré, événements indépendants.
- Formule des probabilités totales.