Produit scalaire
Problème de recherche : le téléski

Un téléski tire un skieur de 70 kg du bas A au haut B d'une piste rectiligne de longueur $AB = 400$ m, inclinée de 20° par rapport à l'horizontale. La perche exerce sur le skieur une force constante $\vec{F}$ d'intensité 300 N, qui fait un angle de 30° avec la pente. Le poids $\vec{P}$ du skieur est vertical, dirigé vers le bas, d'intensité $P = 70 \times 9{,}8 = 686$ N.

En physique, le travail d'une force constante $\vec{F}$ lors d'un déplacement de A à B est le produit scalaire $W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$ (en joules, avec les forces en newtons et les distances en mètres).

La mission

1. Calculer le travail de la force de traction $\vec{F}$.
2. Quel angle le poids fait-il avec le vecteur $\overrightarrow{AB}$? En déduire le travail du poids. Pourquoi est-il négatif ?
3. Calculer le dénivelé h entre A et B. Vérifier, à l'aide d'un projeté orthogonal, que le travail du poids est égal à $-P \times h$.
4. Une autre piste relie A à B en deux portions rectilignes $[AC]$ et $[CB]$. Démontrer, sans calcul de longueur, que le travail du poids est le même que sur la piste directe.

Pour aller plus loin

La montée dure 2 min 40 s. Quelle puissance moyenne (en watts) la perche fournit-elle au skieur ? Si la perche était parallèle à la pente, que deviendrait son travail ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Travail de la traction

$$W_F = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = 300 \times 400 \times \cos 30^\circ = 120\,000 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 103\,900 \text{ J}.$$

La perche fournit environ 104 kJ.

2. Travail du poids

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ monte de 20° au-dessus de l'horizontale ; le poids est dirigé vers le bas, à 90° sous l'horizontale. L'angle entre eux est $90^\circ + 20^\circ = 110^\circ$:

$$W_P = 686 \times 400 \times \cos 110^\circ \approx -93\,850 \text{ J}.$$

Le travail est négatif car l'angle est obtus : le poids s'oppose à la montée (il est « résistant »).

3. Avec le dénivelé

$h = 400 \sin 20^\circ \approx 136{,}8$ m. Soit H le projeté orthogonal de B sur la verticale passant par A : $AH = h$. Comme $\vec{P}$ est vertical, $\vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AH}$. Les vecteurs $\vec{P}$ (vers le bas) et $\overrightarrow{AH}$ (vers le haut) sont colinéaires de sens contraires :

$$W_P = -P \times AH = -686 \times 136{,}8 \approx -93\,850 \text{ J}.$$

4. Le chemin en deux portions

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ (relation de Chasles), et par distributivité du produit scalaire :

$$\vec{P} \cdot \overrightarrow{AC} + \vec{P} \cdot \overrightarrow{CB} = \vec{P} \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \right) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Le travail du poids est le même : il ne dépend que des points de départ et d'arrivée, donc du dénivelé.

Pour aller plus loin

2 min 40 s = 160 s : la puissance moyenne est $\frac{103\,900}{160} \approx 650$ W.

Si la perche était parallèle à la pente, l'angle serait nul et $W = 300 \times 400 = 120\,000$ J : toute la force servirait à faire avancer le skieur. Avec l'angle de 30°, une partie de la force tire le skieur vers le haut, perpendiculairement à la pente, sans le faire avancer.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$, application au travail d'une force.
- Produit scalaire et projection orthogonale.
- Distributivité du produit scalaire.