Produit scalaire
Problème de recherche : atteindre la cible

Un bras robotisé plan est formé d'un premier segment $[OA]$ de longueur 40 cm, articulé en O (l'épaule), et d'un second segment $[AP]$ de longueur 30 cm, articulé en A (le coude). La pince est au point P. On travaille dans un repère orthonormé d'origine O (unité : 1 cm).
On rappelle le théorème d'Al-Kashi : dans un triangle ABC, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$.

La mission

1. À quelles distances de O la pince peut-elle se trouver ? Décrire la zone que le bras peut atteindre.
2. La pince doit saisir un objet en $P(30;40)$. Calculer OP, puis l'angle $\widehat{OAP}$ du coude. Que remarque-t-on ?
3. Déterminer les positions possibles du coude A pour atteindre $P(30;40)$. Vérifier avec GeoGebra.
4. Quel angle faut-il au coude pour atteindre la cible $Q(50;40)$? Et la cible $R(60;40)$?

Pour aller plus loin

On note $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AP}$. Exprimer OP^2 à l'aide de $\vec{u}\cdot\vec{v}$. Pour quelle valeur de $\vec{u}\cdot\vec{v}$ la pince est-elle à 60 cm de l'épaule ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. La zone atteignable

Bras tendu, $OP = 40+30 = 70$ cm ; bras replié, $OP = 40-30 = 10$ cm. Par l'inégalité triangulaire, $10 \leqslant OP \leqslant 70$: la pince peut atteindre tous les points d'une couronne de centre O, de rayons 10 et 70 cm.

2. L'angle du coude

$OP = \sqrt{30^2+40^2} = 50$. Dans le triangle OAP :

$$50^2 = 40^2+30^2-2\times 40\times 30\times \cos\widehat{OAP}, \quad \text{soit} \quad 2\,500 = 2\,500-2\,400\cos\widehat{OAP}.$$

Donc $\cos\widehat{OAP} = 0$. Le coude est à angle droit. On retrouve le triangle rectangle de côtés 30, 40, 50 (réciproque du théorème de Pythagore).

3. Les positions du coude

Par Al-Kashi en O : $\cos\widehat{AOP} = \frac{40^2+50^2-30^2}{2\times 40\times 50} = \frac{3\,200}{4\,000} = 0{,}8$, d'où $\widehat{AOP} \approx 36{,}9°$.

La droite (OP) fait avec l'axe des abscisses un angle α tel que $\cos\alpha = \frac{30}{50} = 0{,}6$, soit $\alpha \approx 53{,}1°$. Le segment $[OA]$ fait donc un angle de $53{,}1° + 36{,}9° = 90°$ ou de $53{,}1° - 36{,}9° \approx 16{,}3°$ avec l'axe :

- $A(0\,;40)$: épaule verticale et avant-bras horizontal, $\overrightarrow{AP} = (30\,;0)$;
- $A(40\cos 16{,}3°\,;40\sin 16{,}3°) \approx (38{,}4\,;11{,}2)$: on vérifie $AP \approx \sqrt{8{,}4^2+28{,}8^2} = 30$.

Avec GeoGebra (curseurs pour les deux angles), on retrouve ces deux configurations, symétriques par rapport à (OP) : « coude en haut » et « coude en bas ».

4. Deux autres cibles

$OQ^2 = 50^2+40^2 = 4\,100$: $\cos\widehat{OAQ} = \frac{2500-4\,100}{2\,400} = -\frac{2}{3}$, d'où $\widehat{OAQ} \approx 131{,}8°$.

$OR^2 = 60^2+40^2 = 5\,200$, soit $OR \approx 72{,}1 > 70$: la cible R est hors d'atteinte (on trouverait $\cos\widehat{OAR} = -\frac{2\,700}{2\,400} < -1$).

Pour aller plus loin

$\overrightarrow{OP} = \vec{u}+\vec{v}$, donc $OP^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 2\,500 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$.

$OP = 60$ donne $3\,600 = 2\,500 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$, soit $\vec{u}\cdot\vec{v} = 550$.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Théorème d'Al-Kashi : calcul d'un angle connaissant les trois côtés.
- Produit scalaire et norme : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.