Suites arithmétiques et géométriques
Problème de recherche : plier une feuille jusqu'à la Lune

Une feuille de papier a une épaisseur de 0,1 mm. À chaque pliage en deux, son épaisseur double. On note e_n l'épaisseur (en mm) après n pliages : $e_0 = 0{,}1$.

La mission

1. Calculer l'épaisseur après 1, 2 et 7 pliages. Exprimer e_n en fonction de n.
2. À l'aide d'un programme Python ou d'un tableur, déterminer combien de pliages il faudrait pour dépasser la hauteur de l'Everest (8 849 m).
3. La distance moyenne de la Terre à la Lune est d'environ 384 400 km. Combien de pliages faudrait-il pour l'atteindre ?
4. La feuille mesure 30 cm de long, et sa longueur est divisée par 2 à chaque pliage. Au bout de combien de pliages la longueur devient-elle plus petite que l'épaisseur ? Pourquoi est-il impossible en pratique de plier une feuille plus de 7 ou 8 fois ?

Pour aller plus loin

Au bout de 42 pliages, une fourmi grimpe sur la pile, puis on fait un pliage de plus. De combien de kilomètres la fourmi est-elle soulevée ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Les premiers pliages

$e_1 = 0{,}2$ mm, $e_2 = 0{,}4$ mm, $e_7 = 0{,}1 \times 2^7 = 12{,}8$ mm. La suite est géométrique de raison 2 : $e_n = 0{,}1 \times 2^n$.

2. L'Everest

8 849 m = 8 849 000 mm.

```
e = 0.1
n = 0
while e < 8849000:
    e = 2*e
    n = n + 1
print(n, e)
```

Le programme affiche 27 : $e_{26} \approx 6{,}7$ km et $e_{27} \approx 13{,}4$ km. Il faut 27 pliages.

3. La Lune

384 400 km = $3{,}844 \times 10^{11}$ mm. En remplaçant la valeur dans le programme : $e_{41} \approx$ 219 902 km et $e_{42} \approx$ 439 805 km. Il faudrait seulement 42 pliages.

4. La longueur de la feuille

La longueur après n pliages est $\ell_n = 300 \times 0{,}5^n$ (en mm). Au tableur : $\ell_5 \approx 9{,}4$ et $e_5 = 3{,}2$; $\ell_6 \approx 4{,}7$ et $e_6 = 6{,}4$. Dès le 6e pliage, la pile est plus épaisse que longue : on ne peut plus la plier. C'est pourquoi on ne dépasse pas 7 ou 8 pliages avec une feuille ordinaire.

Pour aller plus loin

La fourmi passe de e_{42} à $e_{43} = 2e_{42}$: elle est soulevée d'environ 439 805 km, plus que la distance de la Terre à la Lune.

Remarque historique : en 2002, l'élève américaine Britney Gallivan a réussi à plier 12 fois une très longue bande de papier, plus d'un kilomètre de long.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Suite géométrique : relation de récurrence et terme général.
— Recherche d'un seuil par un programme ou un tableur.
— Modélisation d'une évolution par une suite géométrique.