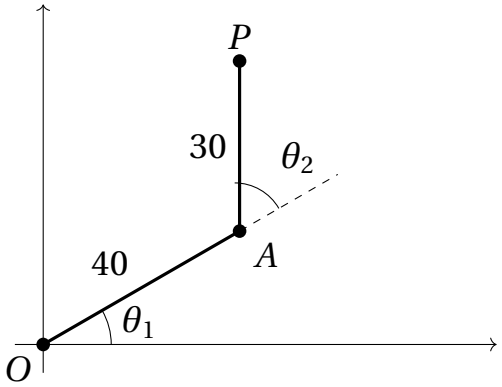
Trigonométrie
Problème de recherche : le bras robotisé

Un bras robotisé plan est formé de deux segments articulés : le bras $[OA]$ de 40 cm, fixé en O, et l'avant-bras $[AP]$ de 30 cm ; la pince est en P. On se place dans un repère orthonormé d'origine O (unité : 1 cm).

— Le moteur 1 règle l'angle θ_1 entre l'axe des abscisses et le bras $[OA]$.

— Le moteur 2 règle l'angle θ_2 entre le prolongement du bras et l'avant-bras $[AP]$.

Ainsi, l'avant-bras fait un angle $\theta_1 + \theta_2$ avec l'axe des abscisses.



La mission

1. Pour $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ et $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$ (situation de la figure), calculer les coordonnées exactes de la pince P.

2. Le robot doit déposer une pièce au point $D(50\,;0)$. Est-ce possible ? Si oui, quels angles programmer ?

Pour aller plus loin

Quelle est la zone que la pince peut atteindre ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

Coordonnées de la pince

Le point A est sur le cercle de centre O de rayon 40 : $A(40\cos\theta_1 ; 40\sin\theta_1)$. De même, $\overrightarrow{AP}$ a pour coordonnées $(30\cos(\theta_1+\theta_2) ; 30\sin(\theta_1+\theta_2))$. Donc

$$P\left(40\cos\theta_1 + 30\cos(\theta_1+\theta_2) ; 40\sin\theta_1 + 30\sin(\theta_1+\theta_2)\right).$$

1. Cas $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$

$\theta_1+\theta_2 = \frac{\pi}{2}$. $A\left(40\times\frac{\sqrt{3}}{2} ; 40\times\frac{1}{2}\right) = (20\sqrt{3} ; 20)$ et $\overrightarrow{AP}\,(0 ; 30)$. $P(20\sqrt{3} ; 50) \approx (34{,}6 ; 50)$.

2. Atteindre $D(50 ; 0)$

$OD = 50$, $OA = 40$, $AD = 30$: comme $40^2+30^2 = 1\,600+900 = 2\,500 = 50^2$, le triangle OAD doit être rectangle en A (réciproque de Pythagore). C'est possible, avec $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ (avant-bras perpendiculaire au bras).

Dans le triangle OAD rectangle en A : $\cos\widehat{AOD} = \frac{40}{50} = 0{,}8$, d'où $\widehat{AOD} \approx 0{,}64$ rad ($\approx 36{,}9°$). Le bras doit être « au-dessus » ou « en dessous » de l'axe :

- coude en bas : $\theta_1 \approx -0{,}64$ rad et $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$;
- coude en haut : $\theta_1 \approx 0{,}64$ rad et $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$.

Vérification (coude en bas) :

$$40\cos(-0{,}64) + 30\cos(0{,}93) \approx 32 + 18 = 50$$

$$40\sin(-0{,}64) + 30\sin(0{,}93) \approx -24 + 24 = 0.$$

Pour aller plus loin

$OP \leqslant OA + AP = 70$ (bras tendu) et $OP \geqslant OA - AP = 10$ (bras replié). La pince atteint la **couronne** comprise entre les cercles de centre O de rayons 10 cm et 70 cm (si les moteurs tournent librement).

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Cercle trigonométrique, radian ; cosinus et sinus des angles remarquables.
- Coordonnées d'un point repéré par un angle ; trigonométrie dans le triangle rectangle.

Pour aller plus loin (enrichissement, hors programme)

Calculer P à partir des angles s'appelle le *modèle géométrique direct* ; retrouver les angles à partir de P, le *modèle inverse*. Ces calculs sont au cœur de la robotique industrielle.