Fonctions trigonométriques
Problème de recherche : la lampe néon

La tension du secteur en France est sinusoïdale. En volts, à l'instant t (en secondes), elle vaut

$$u(t) = 325\sin(100\pi t).$$

Un électricien étudie une lampe témoin au néon : elle s'allume uniquement quand la tension à ses bornes dépasse 230 V en valeur absolue, c'est-à-dire quand $u(t) \geqslant 230$ ou $u(t) \leqslant -230$.

La mission

1. Quelle est la période de la tension ? Sa fréquence ?
2. Pendant quelle proportion du temps la lampe est-elle allumée ?
3. La lampe clignote-t-elle ? Si oui, à quelle fréquence ? Pourquoi l'œil ne le voit-il pas ?

Pour aller plus loin

On remplace la lampe par un modèle qui s'allume dès que $|u(t)|$ dépasse 160 V. Quelle proportion du temps est-elle allumée ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Période et fréquence

sin est 2π-périodique : u reprend les mêmes valeurs quand $100\pi t$ augmente de 2π, soit t de $\frac{2\pi}{100\pi} = 0{,}02$ s. **Période 20 ms, fréquence 50 Hz.**

2. Proportion du temps allumée

On pose $x = 100\pi t$ et on étudie une période : $x \in [0; 2\pi]$. La lampe est allumée quand $|\sin x| \geqslant \frac{230}{325} \approx 0{,}7077$.

Or $\frac{230}{325}$ est très proche de $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071$ (car 230 V est la tension efficace : $325 \approx 230\sqrt{2}$). Sur le cercle trigonométrique, $|\sin x| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$, soit une longueur totale de π sur 2π.

La lampe est allumée environ la moitié du temps (précisément 49,9 % avec 230/325).

3. Le clignotement

Sur une période de 20 ms, la lampe s'allume deux fois (une alternance positive, une négative) pendant environ 5 ms. **Elle clignote à 100 Hz**. L'œil humain ne distingue pas un clignotement au-delà d'environ 50 à 80 Hz (persistance rétinienne) : on voit une lumière continue.

Pour aller plus loin

$\frac{160}{325} \approx 0{,}492$. $\sin x \geqslant 0{,}492$ pour $x \in [\alpha; \pi - \alpha]$ avec $\alpha = \arcsin(0{,}492) \approx 0{,}514$ rad. Proportion : $\frac{2(\pi - 2\alpha)}{2\pi} = 1 - \frac{2\alpha}{\pi} \approx$ **67 %** du temps.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Fonction $t \mapsto A\sin(\omega t)$: période, fréquence, amplitude.
- Résoudre une inéquation $\sin x \geqslant a$ à l'aide du cercle trigonométrique.