Variables aléatoires
Problème de recherche : la retransmission des paquets

Une liaison Wi-Fi transmet des paquets de données. Chaque envoi d'un paquet échoue avec la probabilité 0,1, indépendamment des autres envois. Lorsqu'un envoi échoue, l'émetteur renvoie le paquet, mais au plus 3 envois sont faits pour un même paquet : après 3 échecs, le paquet est définitivement perdu.
On note X le nombre d'envois effectués pour un paquet.

La mission

1. Représenter la situation par un arbre. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
2. Déterminer la loi de probabilité de X, puis son espérance. Interpréter.
3. Un fichier est découpé en 1 000 paquets. Combien d'envois l'émetteur fera-t-il en moyenne ? Quelle est la probabilité qu'un paquet donné soit perdu ?
4. Dans une pièce mal couverte, un envoi échoue avec la probabilité 0,3. Reprendre les questions 2 et 3.

Pour aller plus loin

Avec une probabilité d'échec de 0,3, combien d'envois au maximum faut-il autoriser pour que la probabilité de perdre un paquet soit inférieure à un millionième ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. L'arbre

Premier envoi : succès (0,9) ou échec (0,1). En cas d'échec, deuxième envoi, de même ; en cas de deuxième échec, troisième envoi. X prend les valeurs 1, 2 et 3.

2. Loi et espérance

$P(X=1)=0{,}9$; $P(X=2)=0{,}1\times 0{,}9=0{,}09$; $X=3$ dès que les deux premiers envois échouent : $P(X=3)=0{,}1^2=0{,}01$. On vérifie : $0{,}9+0{,}09+0{,}01=1$.

$$E(X)=1\times 0{,}9+2\times 0{,}09+3\times 0{,}01=1{,}11.$$

Sur un grand nombre de paquets, on fait en moyenne 1,11 envoi par paquet.

3. Un fichier de 1 000 paquets

En moyenne, $1\,000\times 1{,}11=1\,110$ envois. Un paquet est perdu si les trois envois échouent : $0{,}1^3=0{,}001$. En moyenne, un paquet sur mille est perdu (il faudra le redemander).

4. Une pièce mal couverte

$P(X=1)=0{,}7$; $P(X=2)=0{,}3\times 0{,}7=0{,}21$; $P(X=3)=0{,}3^2=0{,}09$.

$E(X)=0{,}7+0{,}42+0{,}27=1{,}39$: environ 1 390 envois pour 1 000 paquets. La probabilité de perte est $0{,}3^3=0{,}027$: environ 27 paquets perdus sur 1 000, 27 fois plus.

Pour aller plus loin

Avec n envois au maximum, la probabilité de perte est $0{,}3^n$. Avec la calculatrice : $0{,}3^{11}\approx 1{,}8\times 10^{-6}$ et $0{,}3^{12}\approx 5{,}3\times 10^{-7}$. Il faut autoriser 12 envois.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, arbre.
- Loi de probabilité d'une variable aléatoire, espérance et interprétation.