Application de la dérivation
Problème de recherche : la production optimale

Une PME fabrique des trottinettes électriques. Pour une production de x centaines de trottinettes par mois ($0 \leqslant x \leqslant 20$), le bénéfice mensuel, en centaines d'euros, est modélisé par

$$B(x) = -2x^3 + 45x^2 - 84x - 50.$$

La mission

1. La directrice veut connaître la production qui donne le plus grand bénéfice, et la valeur de ce bénéfice. Lui répondre.
2. Le service commercial remarque qu'avec une petite production, l'entreprise perd de l'argent. Jusqu'à quelle production les pertes augmentent-elles ? Quelle est la plus grande perte possible ?

Pour aller plus loin

À partir de quelle production (à la centaine près) l'entreprise devient-elle rentable ? Le reste-t-elle jusqu'à la production maximale de 2 000 trottinettes ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

Étude des variations

$B'(x) = -6x^2 + 90x - 84 = -6(x^2 - 15x + 14) = -6(x-1)(x-14)$.

$B'(x)$ est un polynôme du second degré de racines 1 et 14, de coefficient $-6 < 0$: il est négatif à l'extérieur des racines, positif entre elles.

x	0		1		14		20
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
B	-50	↘	-91	↗	2 106	↘	270

1. Bénéfice maximal

Le bénéfice maximal est atteint pour 1 400 trottinettes par mois; il vaut 2 106 centaines d'euros, soit 210 600 €.

2. La perte maximale

Entre 0 et 100 trottinettes, B diminue : les pertes augmentent. **La plus grande perte est de 9 100 €**, pour 100 trottinettes.

Pour aller plus loin

B est strictement croissante sur $[1\,;14]$ et passe de -91 à 2 106 : elle s'annule une seule fois sur cet intervalle. Au tableur : $B(2) = -54$, $B(3) = 49$, puis $B(2{,}6) \approx 0{,}6$. Sur $[14\,;20]$, B décroît mais reste positive ($B(20) = 270$). L'entreprise est rentable **à partir d'environ 300 trottinettes par mois** (plus précisément 260), et elle le reste jusqu'à 2 000 trottinettes.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Dérivée d'un polynôme ; signe de la dérivée et sens de variation.
— Tableau de variations ; extremums ; interprétation économique.