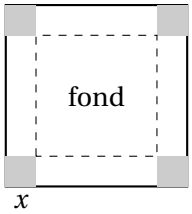
Application de la dérivation
Problème de recherche : le carton sans couvercle

Un fabricant d'emballages découpe un carré de côté x (en cm) dans chaque coin d'une plaque de carton carrée de 60 cm de côté, puis replie les bords pour obtenir une boîte sans couvercle.



La mission

1. Exprimer le volume $V(x)$ de la boîte (en cm^3) en fonction de x. Dans quel intervalle x peut-il varier ?
2. Calculer $V(5)$, $V(10)$ et $V(15)$.
3. Calculer $V'(x)$ et vérifier que $V'(x) = 12(x-10)(x-30)$.
4. Étudier les variations de V. Quelle découpe donne la boîte de plus grand volume ? Quel est ce volume, en litres ?

Pour aller plus loin

On utilise maintenant une plaque rectangulaire de 80 cm sur 50 cm. Vérifier que $V'(x) = 4(3x-100)(x-10)$, puis déterminer la découpe qui donne la plus grande boîte.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Le volume

Le fond est un carré de côté $60-2x$ et la hauteur vaut x : $V(x) = x(60-2x)^2$. Il faut $x > 0$ et $60-2x > 0$, donc $x \in]0;30[$.
En développant : $V(x) = x(3\,600 - 240x + 4x^2) = 4x^3 - 240x^2 + 3\,600x$.

2. Quelques valeurs

$V(5) = 5 \times 50^2 = 12\,500$; $V(10) = 10 \times 40^2 = 16\,000$; $V(15) = 15 \times 30^2 = 13\,500$ (en cm^3).

3. La dérivée

$V'(x) = 12x^2 - 480x + 3\,600$. Et $12(x-10)(x-30) = 12(x^2 - 40x + 300) = 12x^2 - 480x + 3\,600$: c'est bien égal.

4. Variations

Sur $]0;30[$, $x - 30 < 0$ et $12 > 0$; $V'(x)$ a donc le signe contraire de $x - 10$.

x	0		10		30
$V'(x)$		+	0	−	
V		croissante	16 000	décroissante	

La plus grande boîte est obtenue en découpant des carrés de **10 cm** de côté : son volume est 16 000 cm^3, soit 16 litres.

Pour aller plus loin

$V(x) = x(80-2x)(50-2x) = 4x^3 - 260x^2 + 4\,000x$, pour $x \in]0;25[$. $V'(x) = 12x^2 - 520x + 4\,000$, et $4(3x-100)(x-10) = 4(3x^2 - 130x + 1\,000) = 12x^2 - 520x + 4\,000$.
Sur $]0;25[$, $3x - 100 < 0$: $V'(x)$ est positive avant 10 et négative après. La meilleure découpe est encore $x = 10$ cm, et $V(10) = 10 \times 60 \times 30 = 18\,000$ cm^3, soit 18 litres.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Calcul de la fonction dérivée d'une fonction polynôme.
- Signe de la dérivée et variations.
- Résolution d'un problème d'optimisation.