# Application de la dérivation
## Problème de recherche : le prix de l'abonnement

Une plateforme locale de musique en ligne propose un abonnement mensuel. Une étude de marché indique que, si l'abonnement coûte $p$ euros, le nombre d'abonnés sera $1\,200 - 4p^2$ (pour $p$ compris entre 0 et 17). L'abonnement coûte actuellement 12 €.

### La mission

1. Combien la plateforme a-t-elle d'abonnés actuellement ? Quelle est sa recette mensuelle ?
2. Exprimer la recette mensuelle $R(p)$ en fonction de $p$, puis calculer $R'(p)$.
3. Étudier les variations de $R$ sur $[0\,;17]$. Quel prix faut-il choisir pour obtenir la plus grande recette ? Combien y aura-t-il alors d'abonnés ?
4. Le directeur financier veut une recette d'au moins 7 000 € par mois. Entre quels prix (au centime près) l'abonnement doit-il être fixé ?

### Pour aller plus loin

La plateforme reverse 30 % de chaque abonnement aux artistes. Le prix qui donne la plus grande recette est-il aussi celui qui donne la plus grande somme pour la plateforme ? Et pour les artistes ?

### Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

# Éléments de correction

### 1. Situation actuelle

$1\,200 - 4 \times 144 = 624$ abonnés, et une recette de $12 \times 624 = 7\,488$ €.

### 2. Recette et dérivée

$R(p) = p(1\,200 - 4p^2) = 1\,200p - 4p^3$, donc $R'(p) = 1\,200 - 12p^2 = 12(100 - p^2) = 12(10 - p)(10 + p)$.

### 3. Variations

Sur $[0;17]$, $10 + p > 0$ : $R'(p)$ a le signe de $10 - p$. $R$ est croissante sur $[0;10]$ et décroissante sur $[10;17]$.

La recette est maximale pour $p = 10$ € : $R(10) = 12\,000 - 4\,000 = 8\,000$ €, avec $1\,200 - 400 = 800$ abonnés.

En baissant le prix de 12 € à 10 €, la plateforme gagnerait 176 abonnés et 512 € de recette par mois.

### 4. Au moins 7 000 €

Au tableau de valeurs : $R(6{,}95) \approx 6\,997$, $R(6{,}96) \approx 7\,003$ ; $R(12{,}76) \approx 7\,002$, $R(12{,}77) \approx 6\,994$.

Comme $R$ est croissante puis décroissante, $R(p) \geqslant 7\,000$ pour $p$ compris entre environ **6,96 €** et **12,76 €**.

### Pour aller plus loin

La plateforme garde $0{,}7R(p)$ et les artistes reçoivent $0{,}3R(p)$. Multiplier une fonction par un nombre positif ne change pas ses variations : les deux sommes sont maximales pour le même prix, $p = 10$ € (5 600 € pour la plateforme et 2 400 € pour les artistes).

### Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Calcul de la dérivée d'une fonction polynôme de degré 3.
- Signe de la dérivée et variations.
- Optimisation d'une recette.