Dérivation
Problème de recherche : le coût de la pièce de plus

Une entreprise fabrique des enceintes Bluetooth. Le coût total de fabrication de q enceintes par jour (en euros) est modélisé par

$$C(q) = 0{,}02q^2 + 5q + 1\,000 \qquad (0 \leqslant q \leqslant 400).$$

Chaque enceinte est vendue 15 € au distributeur.

La mission

1. L'entreprise fabrique actuellement 100 enceintes par jour. Combien lui coûte la fabrication d'une enceinte supplémentaire ? Comparer avec le nombre dérivé $C'(100)$.
2. Le directeur dit : « Tant qu'une enceinte supplémentaire nous coûte moins de 15 €, on a intérêt à produire plus. » Jusqu'à quelle production a-t-on intérêt à augmenter ? Quel est alors le bénéfice ?

Pour aller plus loin

Le coût moyen d'une enceinte est $\frac{C(q)}{q}$. Pour quelle production est-il le plus faible ? Le comparer au coût de l'enceinte supplémentaire pour cette production. Que remarque-t-on ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Coût de l'enceinte supplémentaire

$C(101) - C(100) = (204{,}02 + 505 + 1\,000) - (200 + 500 + 1\,000) = 9{,}02$ €.

$C'(q) = 0{,}04q + 5$, donc $C'(100) = 9$. **Le nombre dérivé donne une très bonne approximation du coût de l'unité supplémentaire** (9 € au lieu de 9,02 €). Les économistes appellent $C'(q)$ le *coût marginal*.

Explication : $C'(100)$ est la pente de la tangente à la courbe en 100 ; sur un petit intervalle (une seule enceinte), la courbe est presque confondue avec sa tangente.

2. Jusqu'où produire ?

Coût marginal inférieur à 15 € : $0{,}04q + 5 < 15 \iff q < 250$. **On a intérêt à augmenter la production jusqu'à 250 enceintes par jour.**

Bénéfice : $B(q) = 15q - C(q) = -0{,}02q^2 + 10q - 1\,000$. $B(250) = -1\,250 + 2\,500 - 1\,000 = 250$ €. C'est bien le maximum de B (sommet de la parabole en $q = \frac{10}{0{,}04} = 250$).

Pour aller plus loin

Coût moyen : $\frac{C(q)}{q} = 0{,}02q + 5 + \frac{1\,000}{q}$. Au tableur, il est minimal pour $q \approx 224$ (environ 13,94 €). Pour $q = 224$, le coût marginal vaut $0{,}04 \times 224 + 5 \approx 13{,}96$ € : **au minimum du coût moyen, coût moyen et coût marginal sont égaux** (résultat classique en économie).

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Nombre dérivé, fonction dérivée d'un polynôme du second degré.
- Interprétation du nombre dérivé : pente de la tangente, approximation d'un accroissement.