Dérivation
Problème de recherche : l'application qui décolle

Une start-up lance une application. Le nombre total de téléchargements (en milliers), t mois après le lancement, est modélisé par

$$N(t) = 2t^2 + 10t \qquad (t \geqslant 0).$$

La mission

1. Calculer le nombre de téléchargements au bout de 2 mois, puis au bout de 3 mois. Calculer le taux de variation de N entre 2 et 3 et l'interpréter.
2. Calculer le taux de variation de N entre 2 et $2+h$ pour $h = 0{,}1$, puis $h = 0{,}01$, puis $h = 0{,}001$. Vers quelle valeur semble-t-il se rapprocher ?
3. Démontrer que, pour $h \neq 0$, ce taux de variation vaut $18 + 2h$. En déduire le nombre dérivé $N'(2)$ et l'interpréter.
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de N au point d'abscisse 2. L'utiliser pour estimer le nombre de téléchargements au bout de 2,5 mois, et comparer avec la valeur donnée par le modèle.

Pour aller plus loin

Les serveurs saturent quand les téléchargements augmentent de plus de 30 milliers par mois. En calculant de même le nombre dérivé $N'(a)$ pour un nombre a quelconque, déterminer à partir de quand il faudra acheter de nouveaux serveurs.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Taux de variation entre 2 et 3

$N(2) = 8+20 = 28$ milliers et $N(3) = 18+30 = 48$ milliers. Taux de variation : $\frac{48-28}{3-2} = 20$. Entre le 2e et le 3e mois, il y a eu en moyenne 20 000 téléchargements par mois.

2. Vers un nombre dérivé

h	0,1	0,01	0,001
$\frac{N(2+h)-N(2)}{h}$	18,2	18,02	18,002

Le taux de variation semble se rapprocher de 18.

3. Calcul exact

$N(2+h) = 2(4+4h+h^2)+20+10h = 28+18h+2h^2$, donc

$$\frac{N(2+h)-N(2)}{h} = \frac{18h+2h^2}{h} = 18+2h.$$

Quand h se rapproche de 0, $18+2h$ se rapproche de 18 : $N'(2) = 18$. Au bout de 2 mois, les téléchargements augmentent à la vitesse de 18 000 par mois.

4. Tangente et estimation

Tangente : $y = N'(2)(t-2)+N(2) = 18(t-2)+28 = 18t-8$.

Pour $t = 2{,}5$: $18\times 2{,}5-8 = 37$ milliers. Le modèle donne $N(2{,}5) = 12{,}5+25 = 37{,}5$ milliers. L'estimation par la tangente est très proche (écart de 500 téléchargements), car 2,5 est proche de 2.

Pour aller plus loin

$N(a+h) = 2a^2+4ah+2h^2+10a+10h$, donc $\frac{N(a+h)-N(a)}{h} = 4a+10+2h$, qui se rapproche de $4a+10$: $N'(a) = 4a+10$.

$4a+10 > 30 \iff a > 5$: il faudra de nouveaux serveurs à partir de 5 mois après le lancement.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Taux de variation entre deux valeurs.
- Nombre dérivé comme limite du taux de variation.
- Équation de la tangente et approximation.