Fonctions polynômes de degré 2
Problème de recherche : les sweats de l'association

L'association sportive du lycée fait fabriquer et vend des sweats personnalisés. Le trésorier a établi que, pour q sweats fabriqués et vendus ($0 \leqslant q \leqslant 60$), le bénéfice (en euros) est modélisé par

$$B(q) = -0{,}5q^2 + 30q - 200.$$

La mission

1. Combien de sweats faut-il vendre pour que l'opération ne soit pas déficitaire ?
2. Combien de sweats faut-il vendre pour que le bénéfice soit maximal ? Quel est ce bénéfice ?
3. Le trésorier remarque : « Vendre plus de sweats, ce n'est pas toujours gagner plus. » Expliquer pourquoi c'est possible.

Pour aller plus loin

L'association a besoin d'au moins 200 € pour financer un déplacement. Combien de sweats doit-elle vendre ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Opération non déficitaire

On cherche $B(q) \geqslant 0$. Racines de $-0{,}5q^2+30q-200$: $\Delta = 900-400 = 500$,

$$q_1 = \frac{-30+\sqrt{500}}{-1} = 30-\sqrt{500} \approx 7{,}64, \qquad q_2 = 30+\sqrt{500} \approx 52{,}36.$$

Le coefficient de q^2 est négatif : $B(q)$ est positif entre les racines. **Il faut vendre entre 8 et 52 sweats.**

2. Bénéfice maximal

La parabole est tournée vers le bas ; son sommet a pour abscisse $-\frac{b}{2a} = \frac{-30}{-1} = 30$. $B(30) = -450+900-200 = 250$.

Le bénéfice maximal est de 250 €, pour 30 sweats.

3. Explication

Au-delà de 30 sweats, le bénéfice diminue. Dans la réalité, pour vendre plus, il faut baisser les prix, faire de la publicité, ou des sweats restent invendus… Le terme $-0{,}5q^2$ traduit ces coûts qui augmentent plus vite que le nombre de sweats.

Pour aller plus loin

$B(q) \geqslant 200 \iff -0{,}5q^2+30q-400 \geqslant 0 \iff q^2-60q+800 \leqslant 0$. $\Delta = 3\,600-3\,200 = 400$, racines 20 et 40. **Il faut vendre entre 20 et 40 sweats.**

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Fonction polynôme du second degré : racines, signe, sommet de la parabole.
- Résoudre une inéquation du second degré ; interpréter dans le contexte (nombre entier).