Fonctions polynômes de degré 2
Problème de recherche : le prix du billet de concert

Un organisateur de concerts a constaté que, lorsque le billet coûte p euros, il vend $2\,000 - 50p$ billets (pour p compris entre 0 et 40).

La mission

1. Combien de billets vend-il à 15 € ? À 30 € ? Calculer la recette dans chaque cas.
2. On note $R(p)$ la recette. Montrer que $R(p) = p(2\,000 - 50p)$. Pour quel prix la recette est-elle maximale ? Combien de billets sont alors vendus ?
3. Chaque spectateur coûte en réalité 4 € à l'organisateur (sécurité, nettoyage, droits). Montrer que le bénéfice est $B(p) = (p-4)(2\,000 - 50p)$. Pour quel prix le bénéfice est-il maximal ? Que vaut-il ?
4. Pour quels prix l'organisateur ne perd-il pas d'argent ?

Pour aller plus loin

La salle ne contient que 800 places. Quel prix l'organisateur doit-il choisir pour obtenir le plus grand bénéfice possible ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Deux exemples

À 15 € : $2\,000 - 750 = 1\,250$ billets, recette $15 \times 1\,250 = 18\,750$ €.
À 30 € : $2\,000 - 1\,500 = 500$ billets, recette $30 \times 500 = 15\,000$ €.

2. Recette maximale

La recette est le prix multiplié par le nombre de billets : $R(p) = p(2\,000 - 50p)$.
C'est une fonction polynôme de degré 2 sous forme factorisée, de racines 0 et 40 ; en développant, $R(p) = -50p^2 + 2\,000p$, le coefficient de p^2 est négatif. Le maximum est atteint au milieu des racines : $p = \frac{0+40}{2} = 20$ €.
$R(20) = 20 \times 1\,000 = 20\,000$ €, avec 1 000 billets vendus.

3. Bénéfice maximal

$B(p) = R(p) - 4(2\,000 - 50p) = (p-4)(2\,000 - 50p)$.
Racines : 4 et 40 ; coefficient de p^2 : $-50 < 0$. Le maximum est atteint en $p = \frac{4+40}{2} = 22$ € : $B(22) = 18 \times 900 = 16\,200$ €.
Le prix qui maximise le bénéfice (22 €) est plus élevé que celui qui maximise la recette (20 €) : vendre moins de billets réduit aussi les coûts.

4. Ne pas perdre d'argent

$B(p)$ est positif entre ses racines : l'organisateur ne perd pas d'argent pour un prix compris entre 4 € et 40 €.

Pour aller plus loin

Il faut $2\,000 - 50p \leqslant 800$, soit $p \geqslant 24$. Or B est décroissante sur $[22\,;40]$: sur $[24\,;40]$, le bénéfice est maximal pour $p = 24$ €. On vend alors exactement 800 billets, et $B(24) = 20 \times 800 = 16\,000$ €.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Fonction polynôme de degré 2 sous forme factorisée, racines.
- Sommet et variations.
- Signe d'une fonction polynôme de degré 2 factorisée.