Probabilités conditionnelles
Problème de recherche : l'usine responsable

Une marque de trottinettes électriques fait fabriquer ses batteries par deux usines :

— l'usine A produit 60 % des batteries, dont 3 % sont défectueuses ;

— l'usine B produit 40 % des batteries, dont 5 % sont défectueuses.

Les batteries ne portent pas la marque de leur usine d'origine.

La mission

1. Le service après-vente reçoit une batterie défectueuse. Le responsable affirme : « Elle vient sûrement de l'usine B, puisque c'est la moins fiable. » A-t-il raison ?
2. Les frais de remplacement des batteries défectueuses sont partagés entre les deux usines. Proposer un partage juste.

Pour aller plus loin

La marque veut que moins de 3 % de l'ensemble des batteries soient défectueuses. Une seule usine peut améliorer sa production. Laquelle choisir, et quel taux de défaut doit-elle atteindre ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

Un arbre pondéré (ou 10 000 batteries)

On note A, B l'usine d'origine et D « la batterie est défectueuse ».

$$P(A \cap D) = 0{,}6 \times 0{,}03 = 0{,}018, \qquad P(B \cap D) = 0{,}4 \times 0{,}05 = 0{,}020,$$

$$P(D) = 0{,}018 + 0{,}020 = 0{,}038.$$

Sur 10 000 batteries : 180 défectueuses viennent de A et 200 de B, soit 380 au total.

1. D'où vient la batterie ?

$P_D(A) = \frac{0{,}018}{0{,}038} \approx 0{,}474$ et $P_D(B) = \frac{0{,}020}{0{,}038} \approx 0{,}526$.

Il y a un peu plus de chances qu'elle vienne de B, mais **ce n'est pas « sûrement »** : c'est presque une chance sur deux ! L'usine A est plus fiable, mais elle produit beaucoup plus de batteries.

2. Un partage juste

On peut partager les frais selon la provenance probable des batteries défectueuses : environ **47 % pour A et 53 % pour B** (soit 18/38 et 20/38).

Pour aller plus loin

— Si B passe à un taux x : $0{,}018 + 0{,}4x < 0{,}03 \iff x < 0{,}03$: B doit descendre sous 3 %.

— Si A passe à un taux y : $0{,}6y + 0{,}02 < 0{,}03 \iff y < \frac{0{,}01}{0{,}6} \approx 0{,}0167$: A doit descendre sous 1,67 %.

Améliorer B demande de passer de 5 % à 3 % (baisse de 40 %) ; améliorer A, de 3 % à 1,67 % (baisse de 44 %). Les deux efforts sont proches ; le choix dépendra du coût de chaque amélioration.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Arbre pondéré, probabilité d'une intersection, probabilités totales.

— Probabilité conditionnelle $P_D(A)$; interprétation dans le contexte.