Variables aléatoires
Problème de recherche : le ticket à gratter

Un jeu de grattage coûte 2 €. Sur un lot d'un million de tickets, on trouve :

- 1 000 tickets qui rapportent 500 € ;
- 20 000 tickets qui rapportent 10 € ;
- 200 000 tickets qui rapportent 2 € (le prix du ticket est remboursé) ;
- les autres tickets ne rapportent rien.

La publicité affiche : « Plus d'une chance sur 5 de gagner ! »

La mission

1. La publicité dit-elle la vérité ? Qu'en pense un joueur qui achète un ticket par jour pendant un an ?
2. Une association de consommateurs demande que les joueurs récupèrent en moyenne au moins 60 % de leurs mises. Le jeu respecte-t-il cette règle ? Sinon, proposer une modification d'un des gains pour la respecter.

Pour aller plus loin

Pourquoi la plupart des gains sont-ils de 2 € ? Quel est l'intérêt, pour l'organisateur, de rembourser le ticket plutôt que de ne rien donner ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

La loi du gain

On note G le gain brut (somme reçue) pour un ticket acheté au hasard :

g_i	0	2	10	500
$P(G = g_i)$	0,779	0,2	0,02	0,001

1. « Plus d'une chance sur 5 »

$P(G > 0) = 0{,}221 > \frac{1}{5}$: la publicité dit vrai… mais 200 000 « gagnants » sur 221 000 ne font que récupérer leur mise !

$E(G) = 2 \times 0{,}2 + 10 \times 0{,}02 + 500 \times 0{,}001 = 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}5 = 1{,}1$ €. Un ticket coûte 2 € et rapporte en moyenne 1,10 € : **le joueur perd en moyenne 0,90 € par ticket**. Sur un an (365 tickets) : il dépense 730 € et récupère en moyenne environ 402 €, soit une perte moyenne d'environ **329 €**.

2. La règle des 60 %

$\frac{1{,}1}{2} = 55\ \% < 60\ \%$: la règle n'est pas respectée. Il faut $E(G) \geqslant 1{,}20$ €. Par exemple, en portant le gain de 10 € à x euros : $0{,}4 + 0{,}02x + 0{,}5 \geqslant 1{,}2 \iff x \geqslant 15$. **Un gain de 15 € au lieu de 10 € suffit.** (Autre possibilité : gros lot de 600 €.)

Pour aller plus loin

Les gains de 2 € ne coûtent presque rien en moyenne, mais donnent au joueur l'impression de gagner souvent ; ils sont souvent rejoués aussitôt. C'est un procédé commercial, que la loi encadre pour protéger les joueurs.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Loi de probabilité d'une variable aléatoire à partir d'effectifs.
- Espérance : calcul et interprétation comme gain moyen sur un grand nombre de parties.