Ensembles de nombres et arithmétique
Problème de recherche : les cent casiers

Dans le couloir d'un lycée, il y a 100 casiers numérotés de 1 à 100, tous fermés. Cent élèves passent l'un après l'autre :

— l'élève n°1 change l'état de tous les casiers (il les ouvre tous) ;
— l'élève n°2 change l'état des casiers n°2, 4, 6, 8… (il ferme ceux qui sont ouverts, il ouvre ceux qui sont fermés) ;
— l'élève n°3 change l'état des casiers n°3, 6, 9, 12… ;
— et ainsi de suite : l'élève n°k change l'état de tous les casiers dont le numéro est un multiple de k.

La mission

1. Quand les 100 élèves sont passés, quels casiers sont ouverts ?
2. Justifier pourquoi ce sont exactement ceux-là.

Pour aller plus loin

— Quels casiers ont été touchés exactement deux fois ?
— Avec 1000 casiers et 1000 élèves, combien de casiers resteraient ouverts ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

Explorer

En suivant les premiers casiers à la main : le casier 1 est touché une fois (ouvert), le 2 deux fois (fermé), le 4 trois fois (élèves 1, 2, 4 : ouvert), le 6 quatre fois (1, 2, 3, 6 : fermé)… On obtient les casiers ouverts 1, 4, 9, 16, 25…

Le lien avec les diviseurs

Le casier n°n est touché par l'élève n°k si et seulement si n est un multiple de k, c'est-à-dire si k est un **diviseur** de n. Le casier n est donc touché autant de fois que n a de diviseurs. Il est ouvert à la fin si et seulement si ce nombre de diviseurs est **impair**.

Pourquoi les carrés ?

Les diviseurs vont par paires : si k divise n, alors $\frac{n}{k}$ divise aussi n. Par exemple, pour 12 : 1×12, 2×6, 3×4 : six diviseurs. Une paire ne contient qu'un seul nombre seulement si $k=\frac{n}{k}$, c'est-à-dire $n=k^2$. Ainsi :

- si n n'est pas un carré, ses diviseurs se regroupent tous par deux : leur nombre est pair, le casier est fermé ;
- si $n=k^2$, tous les diviseurs vont par deux sauf k : leur nombre est impair, le casier est ouvert.

Les casiers ouverts sont les carrés parfaits : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 et 100, soit 10 casiers.

Pour aller plus loin

Touchés exactement deux fois : les nombres qui ont exactement deux diviseurs (1 et eux-mêmes), c'est-à-dire les **nombres premiers** (2, 3, 5, 7, …, 97) : il y en a 25.
Avec 1000 casiers : les carrés inférieurs ou égaux à 1000 sont $1^2,\ldots,31^2=961$ (car $32^2=1024$) : **31 casiers ouverts**.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Multiples et diviseurs ; nombres premiers ; carrés parfaits.
- Raisonnement : regrouper par paires, justifier une propriété pour tous les entiers.