Ensembles de nombres et arithmétique
Problème de recherche : les cartes de Léo

Léo collectionne des cartes de jeu. Il en a moins de 500.

— Quand il les range par paquets de 3, il en reste 2.
— Quand il les range par paquets de 4, il en reste 2.
— Quand il les range par paquets de 5, il en reste 2.
— Quand il les range par paquets de 6, il en reste encore 2.
— Mais quand il les range par paquets de 7, il n'en reste aucune !

La mission

1. Combien Léo a-t-il de cartes ?
2. Prouver qu'il n'y a pas d'autre réponse possible.

Pour aller plus loin

— Et si Léo avait moins de 1 000 cartes ?
— Trouver le plus petit nombre entier non nul qui, divisé par 2, 3, 4, 5 ou 6, donne toujours un reste de 1, et qui est un multiple de 7.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Réponse : 182 cartes

Vérification : $182 = 3 \times 60 + 2 = 4 \times 45 + 2 = 5 \times 36 + 2 = 6 \times 30 + 2$ et $182 = 7 \times 26$.

2. Il n'y a pas d'autre réponse

Notons N le nombre de cartes. $N - 2$ est un multiple de 3, de 4, de 5 et de 6.

— Multiple de 4 et de 3 : $N - 2$ est un multiple de 12 (car 4 et 3 n'ont pas de diviseur commun autre que 1).

— Multiple de 12 et de 5 : $N - 2$ est un multiple de 60. (Être multiple de 6 est alors automatique.)

Réciproquement, tout nombre de la forme $60k + 2$ convient pour 3, 4, 5 et 6. Les nombres de cette forme inférieurs à 500 sont :

$$2,\ 62,\ 122,\ 182,\ 242,\ 302,\ 362,\ 422,\ 482.$$

On teste la divisibilité par 7 : $62 = 7 \times 8 + 6$, $122 = 7 \times 17 + 3$, $182 = 7 \times 26$, $242 = 7 \times 34 + 4$, $302 = 7 \times 43 + 1$, $362 = 7 \times 51 + 5$, $422 = 7 \times 60 + 2$, $482 = 7 \times 68 + 6$ (et 2 ne convient pas). Seul **182** convient.

Remarque : quand on ajoute 60, le reste dans la division par 7 augmente de 4 (car $60 = 7 \times 8 + 4$), ce qui explique que les restes « tournent ».

Pour aller plus loin

— On continue la liste : 542, 602, 662, 722, 782, 842, 902, 962. Seul $602 = 7 \times 86$ convient. Avec moins de 1 000 cartes, il y a deux réponses : **182 ou 602**.

— $N - 1$ est un multiple de 60 (de 2, 3, 4, 5 et 6) : $N \in \{61,\ 121,\ 181,\ 241,\ 301, \ldots\}$. Le premier multiple de 7 de la liste est **301** $= 7 \times 43$.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Multiples, diviseurs, division euclidienne (reste).

— Raisonnement sur les multiples communs à plusieurs nombres.