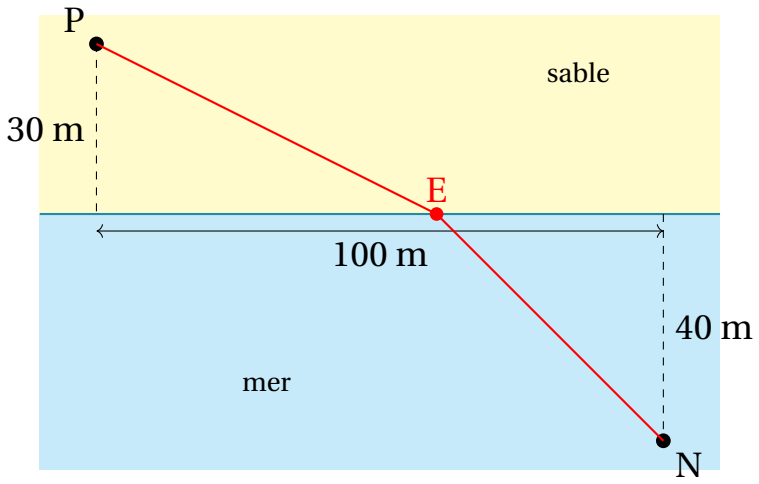
Généralités sur les fonctions
Problème de recherche : le sauvetage en mer

Un maître-nageur, posté en P, aperçoit un nageur en difficulté en N. Le poste est à 30 m de la ligne d'eau, le nageur est à 40 m du rivage, et la distance mesurée le long du rivage entre les deux est de 100 m. Le maître-nageur court à 6 m/s sur le sable et nage à 2 m/s.



Il court jusqu'à un point E du rivage, puis nage jusqu'au nageur, en ligne droite à chaque fois.

La mission

1. Où le maître-nageur doit-il entrer dans l'eau pour atteindre le nageur le plus vite possible ? Donner la position de E au mètre près et la durée du sauvetage.
2. Combien de secondes gagne-t-il par rapport à un trajet en ligne droite de P à N ?

Pour aller plus loin

Le maître-nageur s'entraîne et nage maintenant à 3 m/s. Le point d'entrée optimal se rapproche-t-il ou s'éloigne-t-il du nageur ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

La fonction temps

On note x la distance (en m) entre le pied du poste sur le rivage et le point E, avec $0 \leqslant x \leqslant 100$. Par le théorème de Pythagore :

$$PE = \sqrt{30^2 + x^2}, \qquad EN = \sqrt{40^2 + (100 - x)^2},$$

donc la durée du sauvetage (en secondes) est

$$T(x) = \frac{\sqrt{900 + x^2}}{6} + \frac{\sqrt{1600 + (100 - x)^2}}{2}.$$

x (m)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$T(x)$ (s)	58,9	54,5	50,7	47,4	44,4	41,7	39,5	37,7	36,6	36,4	37,4

1. Le meilleur point d'entrée

En affinant de 1 en 1 entre 80 et 90 : $T(86) \approx 36{,}37$, $T(87) \approx 36{,}37$, $T(88) \approx 36{,}38$. Au mètre près, le maître-nageur doit entrer dans l'eau à environ **87 m** (soit 13 m avant d'être en face du nageur). Le sauvetage dure alors environ **36,4 s**. Il vaut mieux courir longtemps sur le sable, où l'on va vite.

2. Comparaison

En ligne droite, la droite (PN) coupe le rivage aux $\frac{30}{70}$ du trajet, soit pour $x = \frac{3}{7} \times 100 \approx 42{,}9$: $T \approx 43{,}6$ s. Le meilleur trajet fait gagner environ **7 s**, ce qui peut être décisif. (Entrer dans l'eau juste en face du nageur, $x = 100$, donne 37,4 s.)

Pour aller plus loin

Avec 3 m/s dans l'eau, $T(x) = \frac{\sqrt{900+x^2}}{6} + \frac{\sqrt{1600+(100-x)^2}}{3}$. Un tableau donne un minimum vers $x \approx 79$ m (environ 29,1 s) : le point d'entrée s'éloigne du nageur, car nager coûte moins cher qu'avant.

Enrichissement. Au point optimal, on peut vérifier que $\frac{\sin\alpha}{6} = \frac{\sin\beta}{2}$, où α et β sont les angles des deux trajets avec la perpendiculaire au rivage : c'est la même loi que celle de la réfraction de la lumière (loi de Snell-Descartes).

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Fonction définie par une formule, ensemble de définition, tableau de valeurs (tableur), courbe.

— Recherche d'un minimum par lecture d'un tableau de valeurs ou d'une courbe.