Fonctions de référence
Problème de recherche : le classement des racines

Lors d'un défi de calcul, on demande de ranger dans l'ordre croissant les trois nombres

$$a = \sqrt{10} + \sqrt{12}, \qquad b = 2\sqrt{11}, \qquad c = 3 + \sqrt{13},$$

sans calculatrice et en justifiant. Avec une calculatrice, on trouve trois nombres proches de 6,6 : il faut donc une méthode sûre.

La mission

1. Ranger a, b et c dans l'ordre croissant, en justifiant sans calculatrice.
2. Comparer de même $\sqrt{2023} + \sqrt{2029}$ et $\sqrt{2025} + \sqrt{2027}$.

Pour aller plus loin

Pour un entier $n \geqslant 1$, comment évolue $\sqrt{n-k} + \sqrt{n+k}$ quand l'entier k augmente de 0 à n ? Le prouver.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

Principe

Les trois nombres sont positifs. La fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$: deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés. De même, la fonction racine carrée est strictement croissante.

1. Rangement

$$a^2 = 10+2\sqrt{10}\sqrt{12}+12 = 22+2\sqrt{120}, \qquad b^2 = 4\times 11 = 44 = 22+2\times 11,$$

$$c^2 = 9+6\sqrt{13}+13 = 22+2\sqrt{117}.$$

(car $3\sqrt{13} = \sqrt{9}\sqrt{13} = \sqrt{117}$.) Or $11 = \sqrt{121}$ et $117 < 120 < 121$, donc, la racine carrée étant croissante, $\sqrt{117} < \sqrt{120} < \sqrt{121}$. Ainsi $c^2 < a^2 < b^2$ et

$$\boldsymbol{c < a < b}.$$

2. Avec 2023, 2025, 2027, 2029

$$\left(\sqrt{2023}+\sqrt{2029}\right)^2 = 4052+2\sqrt{2023\times 2029}$$

$$\left(\sqrt{2025}+\sqrt{2027}\right)^2 = 4052+2\sqrt{2025\times 2027}.$$

Avec $n = 2026$: $2023\times 2029 = (n-3)(n+3) = n^2-9$ et $2025\times 2027 = n^2-1$. Comme $n^2-9 < n^2-1$, on a $\sqrt{2023}+\sqrt{2029} < \sqrt{2025}+\sqrt{2027}$.

Pour aller plus loin

$\left(\sqrt{n-k}+\sqrt{n+k}\right)^2 = 2n+2\sqrt{n^2-k^2}$. Quand k augmente, n^2-k^2 diminue, donc (racine carrée croissante, puis carré croissant sur les positifs) $\sqrt{n-k}+\sqrt{n+k}$ **diminue**. Sa valeur maximale est $2\sqrt{n}$ (pour $k=0$) et sa valeur minimale est $\sqrt{2n}$ (pour $k=n$).

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Sens de variation des fonctions carré et racine carrée ; comparaison de nombres positifs par leurs carrés.
- Calcul avec les racines carrées : $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.