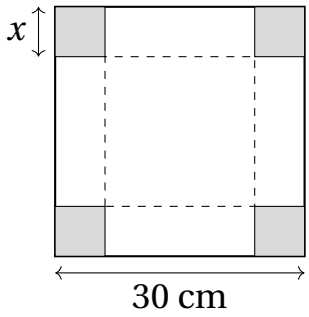
Variations et signes d'une fonction
Problème de recherche : la boîte en carton

Une entreprise fabrique des boîtes sans couvercle à partir de feuilles de carton carrées de 30 cm de côté. On découpe un carré identique dans chacun des quatre coins, puis on replie les bords pour former la boîte.



La mission

Le client veut la boîte qui a le plus grand volume possible. Quelle taille de carré faut-il découper dans les coins ? Quel est alors le volume de la boîte ?

Pour aller plus loin

L'entreprise reçoit maintenant des feuilles au format A4 (21 cm sur 29,7 cm). Même question, au millimètre près.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

Modéliser

Si on découpe des carrés de côté x (en cm), la boîte a une base carrée de côté $30-2x$ et une hauteur x. Son volume est

$$V(x) = x(30-2x)^2, \qquad \text{avec } 0 \leqslant x \leqslant 15.$$

Explorer

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$V(x)$	784	1 352	1 728	1 936	**2 000**	1 944	1 792	1 568

Le volume augmente puis diminue. En affinant autour de 5 (4,9 donne 1 999,6 ; 5,1 donne 1 999,6) ou avec la courbe, on conjecture que le maximum est atteint pour $x = 5$.

Conclusion

x	0		5		15
V	0	↗	2 000	↘	0

Il faut découper des carrés de **5 cm** de côté : la boîte mesure 20 cm × 20 cm × 5 cm et son volume est de **2 000 cm**^{3} (2 litres).

Pour aller plus loin

$V(x) = x(21-2x)(29{,}7-2x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 10{,}5$. Au tableur ou à la calculatrice, le maximum est atteint pour $x \approx 4{,}0$ cm ($V \approx 1\,128$ cm^3).

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Exprimer une grandeur en fonction d'une autre ; ensemble de définition.
- Variations, maximum d'une fonction, tableau de variations ; lecture graphique.

Pour aller plus loin (enrichissement)

En Première, la dérivation permettra de prouver que le maximum est exactement atteint pour $x = 5$, et de trouver la valeur exacte pour le format A4.