Probabilités
Problème de recherche : le 9 et le 10 de Galilée

Au début du XVII^{e} siècle, des joueurs italiens avaient remarqué un fait étrange en lançant trois dés. La somme 9 peut s'écrire de six façons :

$$1+2+6, \quad 1+3+5, \quad 1+4+4, \quad 2+2+5, \quad 2+3+4, \quad 3+3+3,$$

et la somme 10 aussi :

$$1+3+6, \quad 1+4+5, \quad 2+2+6, \quad 2+3+5, \quad 2+4+4, \quad 3+3+4.$$

Pourtant, à force de jouer, ils constataient que le 10 sortait plus souvent que le 9. Le savant Galilée a répondu à leur question dans un court texte.

La mission

1. Les joueurs avaient-ils raison ? Calculer la probabilité d'obtenir une somme de 9 et celle d'obtenir une somme de 10 avec trois dés équilibrés.
2. Expliquer l'erreur de raisonnement qui fait croire que les deux sommes ont la même chance.

Pour aller plus loin

Quelle est la somme la plus probable avec trois dés ? Et la moins probable ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Les probabilités

On distingue les trois dés (rouge, vert, bleu). Une issue est un triplet ordonné : il y a $6 \times 6 \times 6 = 216$ issues équiprobables. Une décomposition donne :

— 6 issues si les trois nombres sont différents (exemple : 1, 2, 6 se répartit de 6 façons sur les trois dés) ;

— 3 issues si deux nombres sont égaux (1, 4, 4 : le 1 peut être sur l'un des trois dés) ;

— 1 issue si les trois sont égaux (3, 3, 3).

Somme 9	issues	Somme 10	issues
1+2+6	6	1+3+6	6
1+3+5	6	1+4+5	6
1+4+4	3	2+2+6	3
2+2+5	3	2+3+5	6
2+3+4	6	2+4+4	3
3+3+3	1	3+3+4	3
Total	**25**	Total	**27**

$P(\text{somme 9}) = \frac{25}{216} \approx 0{,}116$ et $P(\text{somme 10}) = \frac{27}{216} = \frac{1}{8} = 0{,}125$. Les joueurs avaient raison.

2. L'erreur

Les six décompositions ne sont pas équiprobables : « 3+3+3 » ne correspond qu'à une issue, alors que « 1+2+6 » en regroupe six. Pour utiliser l'équiprobabilité, il faut choisir des issues qui ont vraiment toutes la même probabilité : les triplets ordonnés. La différence est faible (environ 1 point) : il fallait beaucoup de parties pour la remarquer !

Pour aller plus loin

En comptant de la même façon, les sommes 10 et 11 sont les plus probables (27 issues chacune, $\frac{1}{8}$). Les sommes 3 et 18 sont les moins probables (1 issue chacune, $\frac{1}{216}$).

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Modèle d'équiprobabilité, choix de l'univers ; dénombrement d'issues.

— Calcul de probabilités d'événements.