Probabilités
Problème de recherche : les tricheurs démasqués

Un professeur donne ce devoir à la maison : « Lancer 100 fois une pièce de monnaie et noter la suite des résultats (P pour pile, F pour face). » Il sait que certains élèves, par paresse, inventeront une suite au hasard « dans leur tête ».
Le lendemain, il annonce : « Je repère les tricheurs en un coup d'œil : ce sont ceux dont la suite ne contient **aucune série de 6 résultats identiques consécutifs** (comme PPPPPP ou FFFFFF). »

La mission

1. La méthode du professeur est-elle fiable ? Estimer, par simulation, la probabilité qu'une vraie suite de 100 lancers contienne au moins une série de 6 résultats identiques.
2. Expliquer pourquoi les élèves qui inventent une suite se font souvent piéger.

Pour aller plus loin

Quelle longueur de plus longue série est la plus fréquente dans une vraie suite de 100 lancers ? Si le professeur ne voulait accuser personne à tort plus d'une fois sur vingt, quel critère devrait-il choisir ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Simulation

Sur un grand nombre de simulations (par exemple 1 000), on trouve qu'environ **80 %** des vraies suites de 100 lancers contiennent une série d'au moins 6 résultats identiques. (Un calcul exact, réalisé par programme, donne 0,807 ; ce calcul dépasse le programme de Seconde.)

Conclusion : la méthode est assez efficace pour repérer les tricheurs, mais **pas fiable** pour accuser un élève : environ une vraie suite sur cinq ne contient aucune série de 6, et l'élève honnête serait accusé à tort.

2. Pourquoi les tricheurs se font piéger

La probabilité que 6 lancers consécutifs donnés soient tous identiques vaut $2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{32}$ (6 piles ou 6 faces). Cela paraît rare, mais une suite de 100 lancers contient 95 blocs de 6 lancers consécutifs : on s'attend en moyenne à en voir environ $\frac{95}{32} \approx 3$ (ils se chevauchent, d'où une probabilité d'en voir au moins un d'environ 80 % et non 100 %). Les humains, eux, pensent qu'une longue série « n'est pas du hasard » et alternent trop souvent pile et face.

Pour aller plus loin

Les simulations montrent que la plus longue série vaut le plus souvent 6 (puis 7). Proportions approximatives des vraies suites contenant une série d'au moins k résultats identiques :

k	5	6	7	8
proportion	97 %	81 %	54 %	31 %

Pour se tromper moins d'une fois sur vingt (5 %), le critère « aucune série de 5 » convient : seulement environ 3 % des vraies suites n'en contiennent pas.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Probabilité d'une issue lorsqu'on répète une expérience aléatoire (pile ou face).

— Simulation d'une expérience aléatoire pour estimer une probabilité.