Inéquations et calcul littéral
Problème de recherche : l'enclos du chantier

Une entreprise de travaux publics dispose de 40 mètres de barrières de chantier. Elle doit délimiter une zone de stockage rectangulaire, entièrement fermée par les barrières.
Pour y ranger son matériel, la zone doit avoir une aire d'**au moins 96 m^2**.

La mission

1. Quelles dimensions peut avoir la zone ? Donner toutes les possibilités et le prouver.
2. Quelle est la plus grande aire que l'on peut délimiter ?

Pour aller plus loin

Sur un autre chantier, la zone est adossée à un long mur : les barrières ne ferment que trois côtés. Quelle est la plus grande aire que l'on peut obtenir avec 40 m de barrières ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

Modéliser

Le périmètre vaut 40 m, donc longueur + largeur = 20 m. Si un côté mesure x mètres ($0 < x < 20$), l'autre mesure $20 - x$ et l'aire vaut $A(x) = x(20-x)$.

1. Résoudre $x(20-x) \geqslant 96$

$x(20-x) \geqslant 96 \iff -x^2+20x-96 \geqslant 0$. On factorise en faisant apparaître une identité remarquable :

$$\begin{aligned} -x^2+20x-96 &= -\left(x^2-20x+96\right) = -\left[(x-10)^2-4\right] \\ &= -(x-10-2)(x-10+2) = -(x-12)(x-8). \end{aligned}$$

x	0		8		12		20
$x-8$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-12$		$-$		$-$	0	$+$	
$-(x-8)(x-12)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'aire est d'au moins 96 m^2 si et seulement si un côté mesure entre 8 m et 12 m (l'autre mesure alors entre 12 m et 8 m). Par exemple 8 m × 12 m (exactement 96 m^2) ou 10 m × 10 m.

2. Aire maximale

$A(x) = -(x-10)^2+100 \leqslant 100$, avec égalité pour $x = 10$. **L'aire maximale est 100 m^2, pour un carré de 10 m de côté.**

Pour aller plus loin

Avec deux côtés de longueur x perpendiculaires au mur et un côté $40-2x$ parallèle au mur : $A(x) = x(40-2x) = -2(x-10)^2+200$. **Aire maximale : 200 m^2** (10 m × 20 m) : le mur double l'aire !

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Mise en équation ; développer, factoriser avec les identités remarquables.
- Tableau de signes d'un produit ; résolution d'une inéquation.