Inéquations et calcul littéral
Problème de recherche : aire contre périmètre

Un rectangle de 3 cm sur 6 cm a une aire de 18 cm^2 et un périmètre de 18 cm : les deux nombres sont égaux! Dans tout le problème, on compare simplement les nombres, sans tenir compte des unités.

La mission

1. Trouver tous les rectangles dont les côtés mesurent un nombre entier de centimètres et dont l'aire est égale au périmètre. Prouver qu'il n'y en a pas d'autres.
2. Un rectangle a une largeur de 3 cm. Pour quelles longueurs (pas forcément entières) son aire est-elle strictement supérieure à son périmètre ? Et si la largeur vaut 2 cm ?

Pour aller plus loin

Trouver tous les rectangles à côtés entiers dont l'aire est égale au double du périmètre.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Aire égale au périmètre

Le tableur fait apparaître des 0 pour 3×6, 6×3 et 4×4. Preuve : pour une largeur x et une longueur y entières strictement positives,

$$xy = 2x+2y \iff xy-2x-2y+4 = 4 \iff (x-2)(y-2) = 4.$$

$x-2$ et $y-2$ sont des entiers supérieurs ou égaux à -1 dont le produit vaut 4. Les décompositions $(-1)\times(-4)$ et $(-2)\times(-2)$ sont impossibles ($y-2=-4$ ou $x-2=-2$ donnerait un côté négatif ou nul). Il reste 1×4, 2×2 et 4×1, d'où les rectangles **3 cm sur 6 cm** et le **carré de 4 cm** de côté.

2. Largeur fixée

Largeur 3 : $3y > 2(3+y) \iff 3y > 6+2y \iff y > 6$. L'aire dépasse le périmètre pour toute longueur **strictement supérieure à 6 cm**.

Largeur 2 : $2y > 2(2+y) \iff 2y > 4+2y \iff 0 > 4$, ce qui est faux : **jamais**. (Plus généralement, pour une largeur $x \leqslant 2$, l'aire est toujours inférieure au périmètre, car $xy \leqslant 2y < 2x+2y$.)

Pour aller plus loin

$xy = 4x+4y \iff (x-4)(y-4) = 16$. Les décompositions de 16 en produit d'entiers supérieurs ou égaux à -3 : 1×16, 2×8, 4×4, 8×2, 16×1. On obtient les rectangles **5 sur 20**, **6 sur 12** et **8 sur 8**.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Développement et factorisation d'expressions littérales.
- Résolution d'inéquations du premier degré.